EICHENSCHULE
staatl. anerk. Gymnasium
in freier Trägerschaft
27383 Scheeßel

Facharbeit
im
Seminarfach
2018

Kursleiter:	Herr Frick
Kurs:	1sf7
Zeitraum:	10.01. – 23.02.2018

Thema:

Numerische Integration

vorgelegt von:
Robin Wilkens
Hinterm Kohlhof 6
27383 Scheeßel

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Der Begriff „Integralrechnung“ wurde erst im 19. Jahrhundert definiert.[1] Doch auch schon in der früheren Vergangenheit wurde versucht Flächeninhalte zu berechnen, beziehungsweise mit numerischen Integrationsverfahren anzunähern. Johannes Kepler entwickelte zum Beispiel die Keplersche Fassregel.[2] Nach und nach wurde dieses Verfahren weiterentwickelt und dabei abgeändert.

In dieser Facharbeit wird zunächst der Begriff „numerische Integration“ allgemein erläutert, um ein Grundwissen und -verständnis für das Thema aufzubauen. Anschließend werden zwei dieser abgeänderten respektive weiterentwickelten Verfahren mathematisch hergeleitet. Zur Veranschaulichung wird dies durch entsprechende Grafiken unterstützt. Durch Beispielrechnungen werden sie auf Vor- und Nachteile untersucht. Zusätzlich wird ein drittes Verfahren kurz vorgestellt.

Bei allen drei Verfahren wird ein besonderes Augenmerk auf die Genauigkeit und Fehlerabschätzung gelegt, die anschließend untereinander verglichen werden.

Am Ende werden noch einmal alle Verfahren den jeweils anderen gegenübergestellt und hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeiten überprüft. Somit ist das Ziel dieser Facharbeit ein Verständnis für numerische Integration zu vermitteln und dabei die Möglichkeit zu bieten, sich verschiedene Verfahren anzueignen.

2. Definition der numerischen Integration

Die Integration ist das gängigste und auch genauste Mittel in der Mathematik, um einen Flächeninhalt unter einem Graphen oder auch einen Flächeninhalt, welche von zwei verschiedenen Graphen eingeschlossen wird, zu berechnen. Dies ist zum Einen für das einfache Rechnen mit Funktionen, aber auch zum Auswerten von Statistiken oder Messwerten von Nutzen.

Um die Fläche zu berechnen, muss von dem Funktionsterm die so genannte Stammfunktion gebildet und anschließend durch Einsetzen der Intervallgrenzen berechnet werden. Doch wie kann eine Lösung erlangt werden, wenn die Stammfunktion nicht gebildet werden kann oder die Bildung zu aufwändig ist? Gibt es diesen Fall überhaupt?

Solche Funktionsgleichungen werden als „nicht elementar integrierbar“ bezeichnet.[3] $f(x) = e^{x^2}$ ist zum Beispiel eine solche Funktionsgleichung. Wie wird nun vorgegangen?

---

[1] Integralrechnung (Hrsg.) (o.J.): Geschichte der Integralrechnung. abrufbar im Internet. URL: http://www.integralrechnung.net/geschichte.html (eingesehen am 20.01.2018).

[2] Wilkens, Robin (2017): Johannes Kepler – Die Keplersche Fassregel, unveröffentlichte Hausarbeit, Scheeßel, S. 4-5.

[3] Lernhelfer (Hrsg.) (2010): Numerische Integration. abrufbar im Internet. URL: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/numerische-integration (eingesehen am 20.01.2018).

Es wird wieder bei der Herleitung der Integralrechnung begonnen. Nämlich durch so genannte *numerische Integrationsverfahren*. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt angenähert wird, indem die zu integrierende Fläche in mehrere kleine Flächen zerlegt wird, die einfach berechnet werden können.[4] Zum Beispiel so, dass man, wie bei der Herleitung der Integralrechnung, die Ober- und Untersumme eines Graphen durch Aufteilung in Rechtecke berechnet (siehe Abb.1[5]). Dabei gibt es auch einige Verfahren, die das Integral auf andere Weise annähern wie zum Beispiel die Keplersche Fassregel, das Sehnen-Trapez-Verfahren oder die Simpsonregel.

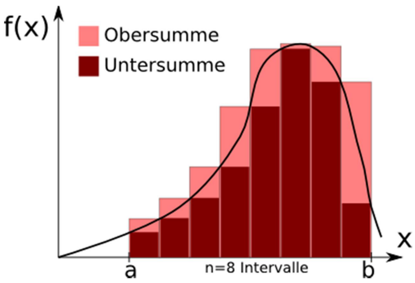

Abb. 1: Bildung der Ober- und Untersumme durch Rechtecke.

3. Das Sehnen-Trapez-Verfahren

Wie einfach ein Integral durch relativ simple numerische Integration angenähert werden kann, wurde von Johannes Kepler gezeigt. Mit seiner nach ihm benannten Keplerschen Fassregel berechnete er das Integral einmal grob mit einer Fläche und einmal etwas genauer mit zwei Teilflächen, welche er anschließend im Verhältnis $1:2$ mittelte. Ideenquelle für dieses Verfahren war ein Weinfass, von dem Johannes Kepler das Volumen berechnen wollte. Dabei machte er bei der einzelnen Fläche von einem Rechteck und bei den zwei Teilflächen von Trapezen gebrauch.[6]

Kepler war nicht der einzige Mathematiker, der den Einfall hatte, mithilfe von Trapezen Flächeninhalte zu berechnen.[7] So entstand das Sehnen-Trapez-Verfahren, auch Sehnen-Trapez-Regel genannt.

Wie auch bei der Fassregel, wird das Integral mit mindestens einer Fläche angenähert, mit dem Unterschied, dass es sich bei dem Sehnen-Trapez-Verfahren stets um ein Trapez anstatt um ein Rechteck handelt.

Anstatt die Ungenauigkeit der einzelnen Fläche durch eine, beziehungsweise mehrere, anderer Flächen auszugleichen, kann die berechnete Fläche in beliebig viele kleinere Flächen unterteilt werden. Somit werden die Freiräume zwischen den Flächen und dem Graphen verkleinert (siehe Abb. 2[8]).

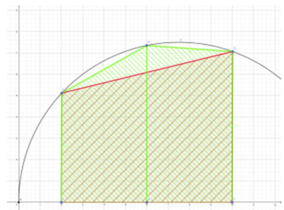
Abb. 2: Mit zwei Trapezen (grün) ist die Annäherung deutlich genauer als mit einem (rot).

[4] Lernhelfer (Hrsg.) (2010): Integration. (eing. 20.01.18).
[5] Uni-Göttingen (Hrsg.) (2013): Abb. 7492. Ober- und Untersumme. abrufbar im Internet. URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/7493 (eingesehen am 20.01.18).
[6] Informationen von: Wilkens (2017). Johannes, S. 3.
[7] Wikipedia (Hrsg.) (2018): Simpsonregel. abrufbar im Internet. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (eingesehen am 02.02.2018).
[8] Eigenanfertigung (23.01.2018).

3.1 Rechnerische Herleitung

Zunächst wird lediglich ein großes Trapez für die Berechnung genutzt. Der Flächeninhalt ist das Produkt von der Grundseite und der mittleren Höhe. Die Grundseite wird hier von den Intervallgrenzen a und b gebildet. Die mittlere Höhe wird durch den Term $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ berechnet.

Somit gilt (siehe Abb.3[9]):

$A_T = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2} \cdot \big(f(a)+f(b)\big).$

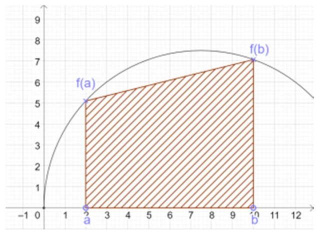

Abb. 3: Annäherung des Integrals mit einem Trapez

Wird das Trapez in der Mitte geteilt, wodurch zwei Trapeze entstehen und die kürzer gewordenen Grundseiten h genannt werden, sodass $b-a=2h$ gilt, ergibt sich (siehe Abb. 4[10]):

$A_T = A_1 + A_2 = \frac{h}{2} \cdot \big(f(a)+f(a+h)\big) + \frac{h}{2} \cdot \big(f(a+h)+f(b)\big)$

$$A_T = \frac{h}{2} \cdot f(a) + \frac{h}{2} \cdot f(a+h) + \frac{h}{2} \cdot f(a+h) + \frac{h}{2} \cdot f(b)$$

$$A_T = \frac{h}{2} \cdot \big(f(a) + 2 \cdot f(a+h) + f(b)\big).$$

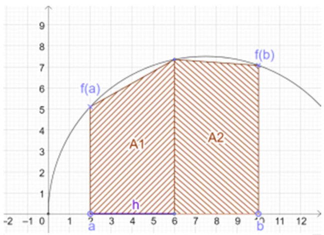

Abb. 4: Annäherung des Integrals mit zwei Trapezen

Aufgrund von $b-a=2h$ gilt ebenfalls: $\frac{b-a}{2} = h$ und $\frac{b-a}{4} = \frac{h}{2}$.[11]

Daher kann die Formel auch

$$A_T = \frac{b-a}{4} \cdot \big(f(a) + 2 \cdot f(a+h) + f(b)\big)$$

lauten.

Das ist dann genau die Formel, welche auch in der Keplerschen Fassregel angewendet wird, um den Inhalt der zwei Trapeze beziehungsweise geteilten Flächen zu berechnen.

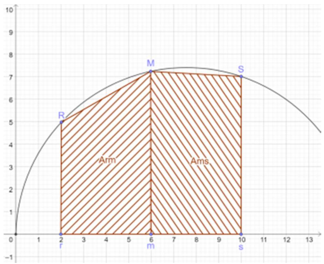

Abb. 5: Berechnung zweier Trapeze nach der Keplerschen Fassregel

Im Beispiel der Grafik (Abb. 5[12]; zur Unterscheidung werden hier andere Variablen verwendet) lautet diese:

$$A = A_{rm} + A_{ms} = \left[\frac{(m-r)\cdot\big(f(r)+f(m)\big)}{4}\right] + \left[\frac{(s-m)\cdot\big(f(m)+f(s)\big)}{4}\right]$$

$$= \frac{(s-r)\cdot\big(f(r) + 2 \cdot f(m) + f(s)\big)}{4}.$$ [13]

[9] Eigenanfertigung (23.01.2018).
[10] Eigenanfertigung (23.01.2018).
[11] Informationen von: Fernuni-Hagen (Hrsg.) (o. J.): Numerische Integration. abrufbar im Internet. URL: http://mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node110.html (eingesehen am 20.01.2018) und Champacademy (Hrsg.) (2017): Trapezregel. Abrufbar im Internet. URL: https://www.youtube.com/watch?v=BZbzdsvpc3c&index=1&list=PLFT-PqvNIlJS0hdmYMd9ad9137JzZfGMxn (eingesehen am 20.01.2018).
[12] Eigenanfertigung (21.02.2018).
[13] Wilkens (2017). Johannes, S. 5.

Zu beachten ist auch hier, dass sich der Wert für h in Abhängigkeit zu der Anzahl der Teilintervalle n ändert. Dabei wird h folgendermaßen berechnet: $h = \frac{b-a}{n}$.

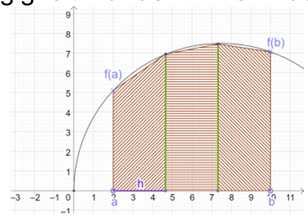

Abb. 6: Bei drei Trapezen wird $\boldsymbol{h}$ verkürzt. Die grünen Strecken gehören jeweils zu zwei Trapezen. Deshalb muss ihre Höhe doppelt verrechnet werden.

Somit gilt für die Aufteilung in drei Trapeze (Abb. 6[14]):

$h = \frac{b-a}{3} = \frac{10-}{3} = \frac{8}{3}$.

Des Weiteren wird die Formel nun erweitert, da eine weitere Senkrechte ergänzt wurde. Da diese, genauso wie die bei zwei Trapezen eingezeichnete, zu zwei verschiedenen Trapezen gehört und deshalb zweimal für die Berechnung der mittleren Höhe benötigt wird, wird sie ebenfalls mit zwei multipliziert. Da h genau der Länge eines Teilintervalls entspricht, wird h zu jedem vorherigen Wert addiert, um das nächste Intervall zu betrachten. Bedeutet im Beispiel (Abb. 6):

$$A_T = \frac{h}{2} \cdot \big(f(a) + 2 \cdot f(a+h) + 2 \cdot f(a+h+h) + f(b)\big)$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \left(f(2) + 2 \cdot f\left(\frac{8}{3}\right) + 2 \cdot f\left(\frac{16}{3}\right) + f(8)\right).$$

Die Anzahl der Teilintervalle n kann beliebig groß sein. Je größer n, desto genauer der angenäherte Flächeninhalt.

Da immer, wenn n größer gewählt wird, auch neue senkrechte Seiten für die Trapeze entstehen, lautet die allgemeine Formel für die Sehnen-Trapez-Formel:

$$\boldsymbol{A_T = \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)}.^{15}$

3.2 Genauigkeit

Um eine Aussage über die Genauigkeit zu treffen, berechne ich das Integral im Intervall [0; 1] und [3; 5] für die Funktionsgleichung $f(x) = x \cdot e^x$ zunächst mit dem Sehnen-Trapez-Verfahren und anschließend genau per Integration.

Beispiel 1: $f(x) = x \cdot e^x$; $[0;\ 1]$; $h = \frac{1-0}{n}$

Teil-intervalle n	Eingesetzte Werte in die allgemeine Formel	Ergebnis
1 $h = 1$	$A_T = \frac{1}{2} \cdot (f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} \cdot (0 + e)$	$\frac{e}{2} \approx 1{,}35914$ $Fehler < 10^0$

[14] Eigenanfertigung (23.01.2018).
[15] Informationen von: Champcademy (Hrsg, 2017). Trapezregel (eing. am 20.01.18).

5 $h = \frac{1}{5}$	$A_T = \frac{1}{10} \cdot \left(f(0) + 2 \cdot \left(f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right) + f(1)\right)$	$\approx 1{,}01477$ $Fehler < 10^{-1}$
10 $h = \frac{1}{10}$	$A_T = \frac{1}{20} \cdot \left(f(0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{9} f\left(0 + i \cdot \frac{1}{10}\right) + f(1)\right)$	$\approx 1{,}0037$ $Fehler < 10^{-2}$
100 $h = \frac{1}{100}$	$A_T = \frac{1}{200} \cdot \left(f(0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} f\left(0 + i \cdot \frac{1}{100}\right) + f(1)\right)$	$\approx 1{,}00004$ $Fehler < 10^{-4}$

Die genauste Berechnung per Integration ergibt: $\int_0^1 x \cdot e^x \, dx = 1$.

Beispiel 2: $f(x) = x \cdot e^x$; $[3;\ 5]$; $h = \frac{5-3}{n}$

Teil-inter-valle n	Eingesetzte Werte in die allgemeine Formel	Ergebnis
1 $h = 2$	$A_T = 1 \cdot (f(3) + f(5) = 1 \cdot (3 \cdot e^3 + 5 \cdot e^5)$	$\approx 802{,}32241$ $Fehler < 10^3$
5 $h = \frac{2}{5}$	$A_T = \frac{1}{5} \cdot \left(f(3) + 2 \cdot \left(f\left(3\frac{2}{5}\right) + f\left(3\frac{4}{5}\right) + f\left(3\frac{6}{5}\right) + f\left(3\frac{8}{5}\right)\right) + f(5)\right)$	$\approx 564{,}24563$ $Fehler < 10^2$
10 $h = \frac{1}{5}$	$A_T = \frac{1}{10} \cdot \left(f(3) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{9} f\left(3 + i \cdot \frac{1}{5}\right) + f(5)\right)$	$\approx 556{,}17965$ $Fehler < 10^1$
100 $h = \frac{1}{50}$	$A_T = \frac{1}{100} \cdot \left(f(3) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} f\left(3 + i \cdot \frac{1}{50}\right) + f(5)\right)$	$\approx 553{,}50857$ $Fehler < 10^0$

Die genauste Berechnung per Integration ergibt: $\int_3^5 x \cdot e^x \, dx \approx 553{,}48156$.

Diese Beispielrechnungen zeigen, wie stark das Ergebnis bereits nach Verfünffachung der Teilintervalle exakter wird. Im Beispiel 1 verringert sich die Ungenauigkeit von einem Fehler von 10^0 auf circa 10^{-1}. Im Beispiel 2 von circa 10^3 auf 10^2. In beiden Fällen ist das Ergebnis also um eine 10er-Potenz genauer, was in der Größenregion der Fehler jedoch einen sehr großen Unterschied macht.
Bei zunehmender Erhöhung von n bleibt die Verbesserung der Genauigkeit weiterhin bei einer 10er-Potenz, jedoch macht diese, je kleiner sie wird, immer weniger Unterschied zum exakten Ergebnis aus. In Beispiel 1 liegt die Abweichung zum exakten Ergebnis bei zusätzlicher Verdopplung von n noch bei 10^{-2} und in Beispiel 2 bei 10^1.
Dabei werden die Ergebnisse bei 100 Intervallen beziehungsweise 101 Stützstellen bis auf vier Nachkommastellen (also 10^{-4} im Beispiel 1) und bis auf die erste Stelle vor dem Komma (10^0) in Beispiel 2 genau.

3.3 Vor- und Nachteile

Allein der Fakt, dass das Sehnen-Trapez-Verfahren ein Integral nur ungefähr angeben kann, zeigt, dass diese Art von Integralberechnung Schwächen aufweist.
Doch wie viele Schwachpunkte hat das Verfahren und wie stehen diese im Verhältnis zu den positiven Eigenschaften?
Zunächst wird der Nachteil, dass die Fläche nur angenähert wird, durch die Möglichkeit unendlich viele Teilintervalle, beziehungsweise Stützstellen, im Gesamtintervall $[a; b]$ zu ergänzen, sehr gut kompensiert. Angesichts dieses Mittels kann die Genauigkeit je nach Gebrauch gesteigert oder gesenkt werden.
Passend dazu ist auch die Systematik der allgemeinen Formel in der Hinsicht sehr simpel, dass bei Zunahme von n lediglich ein beziehungsweise mehrere Teilterme in die Klammer, welche mit zwei multipliziert wird, eingefügt werden müssen und h neu berechnet und entsprechend ersetzt werden muss. Das bedeutet zum Beispiel:

$a = 2; b = 3; n = 4$

$$h = \frac{1}{4} \quad A = \frac{1}{8} \cdot \left(f(2) + 2 \cdot \left(f\left(2 + \frac{1}{4}\right) + f\left(2 + \frac{2}{4}\right) + f\left(2 + \frac{3}{4}\right) \right) + f(3) \right)$$

$a = 2; b = 3; n = 6$

$$h = \frac{1}{6} \quad A = \frac{1}{12} \cdot \left(f(2) + 2 \cdot \left(f\left(2 + \frac{1}{6}\right) + f\left(2 + \frac{2}{6}\right) + f\left(2 + \frac{3}{6}\right) + f\left(2 + \frac{4}{6}\right) + f\left(2 + \frac{5}{6}\right) \right) + f(3) \right)$$

Hier werden demselben Intervall zwei Teilintervalle hinzugefügt und es müssen nur die rot gekennzeichneten Terme geändert beziehungsweise hinzugefügt werden.
Das führt allerdings zu einem schwerwiegenden Nachteil. Zwar ist es einfach den Term zu erweitern, jedoch wird er dadurch schnell so lang, dass es höchst aufwändig ist, ihn aufzuschreiben und die Funktionswerte auszurechnen. Wie im Beispiel 2 zu sehen ist, werden abhängig von der Funktion und vom Intervall bereits 101 Stützstellen benötigt, um einen relativ großen Fehler von 10^0 zu erreichen. 101 Funktionswerte zu berechnen ist viel zu aufwändig. Dort schafft die Summenfunktion

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h)$$

Abhilfe, da es somit nicht mehr nötig ist, jeden Teilterm einzeln aufzuschreiben.
Diese Art die Funktion aufzuschreiben, ist für die Theorie zwar dienlich, für die praktische Anwendung jedoch nur sehr eingeschränkt nutzbar. Denn um eine solche Summenfunktion auszurechnen, wird ein Computeralgebrasystem (CAS) benötigt. Herkömmliche Taschenrechner sind nicht in der Lage eine solche Anweisung zu verarbeiten und auch per Hand muss wieder jeder Teilterm einzeln berechnet werden. Wenn jedoch ein CAS verwendet wird, ist es noch einfacher

die Fläche mithilfe normaler Integralrechnung berechnen zu lassen. Gleichzeitig wird so der exakte Flächeninhalt ausgegeben. Daher hat das Sehnen-Trapez-Verfahren in dieser Situation nur noch einen Verwendungszweck, wenn von der zu integrierenden Funktion keine Stammfunktion gebildet werden kann.
Ein weiteres Problem ist, dass in dem Fall, dass das zu integrierende Intervall vom Positiven ins Negative und gleichzeitig der Graph in einem Teilintervall im dritten Quadranten verläuft, das Integral falsch angegeben wird. Das liegt an den negativen Funktionswerten, die dann von den positiven abgezogen werden. In so einem Fall müsste das Intervall dann geteilt und per Hand die Beträge der Flächen addiert werden.

4. Die Simpsonregel

Die Simpsonregel ist ein weiteres numerisches Integrationsverfahren, welches von Thomas Simpson entwickelt wurde und genauso aufgebaut ist wie die Keplersche Fassregel. Genaugenommen sind die beiden Regeln identisch.[16]
Die beiden Regeln nähern die Fläche unter einem Graphen an, indem im Intervall die beiden Grenzen und zusätzlich der Mittelpunkt des Intervalls betrachtet werden. Von dem Funktionswert des Mittelpunktes ($f(m)$) aus wird jeweils eine Strecke zum Funktionswert der jeweiligen Grenze ($f(a)$; $f(b)$) gelegt, sodass zwei Trapeze entstehen (siehe Abb. 7[17]). Zusätzlich wird - anders als beim Sehnen-Trapez-Verfahren - durch Verbinden der Grenzfunktionswerte mit der Tangente vom Mittelpunkt des Intervalls eine weitere Fläche gebildet (siehe Abb. 8[18]). Die Summe der Flächeninhalte der Trapeze und der des Rechtecks werden im Verhältnis $2:1$ miteinander verrechnet, da die Trapeze die Fläche zu klein und das Rechteck zu groß berechnen. Das daraus entstandene Ergebnis ist der ungefähre Flächeninhalt.[19]

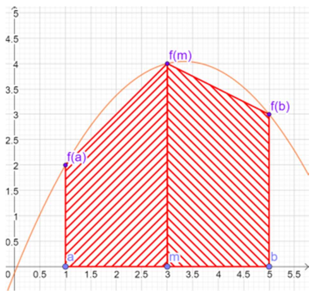

Abb. 7: Aufteilung der Fläche in zwei Trapeze

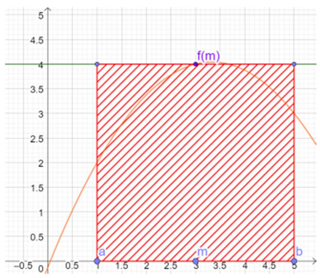

Abb. 8: Einzeichnung der Fläche über die Tangente vom Funktionswert des Mittelpunktes

Unterteilt man das gesamte Intervall, welches integriert werden soll, in mehrere kleine, kann auf jedes Teilintervall die Keplersche Fassregel beziehungsweise die Simpsonregel angewendet werden. Addiert man jedes Teilintervall, so erhält man die summierte Simpsonregel, welche auch summierte Simpsonsche Formel genannt wird.

[16] Wikipedia (Hrsg.) (2018): Simpsonregel. abrufbar im Internet. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (eingesehen am 02.02.2018).
[17] Eigenanfertigung (02.02.2018).
[18] Eigenanfertigung (02.02.2018).
[19] Informationen von: Wilkens (2017). Johannes, S. 5-6.

4.1 Rechnerische Herleitung

Zunächst werden die beiden Teilflächen berechnet.

Es gilt: $h = b - a$; $m = \frac{a+b}{2}$.

Die beiden Trapeze werden wieder mit dem Produkt aus der Grundseite und der mittleren Höhe berechnet.

$$A_{am} = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{f(a) + f(m)}{2}\right) = \frac{h \cdot (f(a) + f(m))}{4}$$

$$A_{mb} = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{f(m) + f(b)}{2}\right) = \frac{h \cdot \left(f(m) + f(b)\right)}{4}.$$

Dabei gibt h die Länge des Gesamtintervalls an und m ist der Mittelpunkt des Intervalls, welcher durch den Term $m = \frac{a+b}{2}$ ermittelt wird.[20] Wie auch beim Sehnen-Trapez-Verfahren ist es wichtig zu beachten, dass sich die Intervalllänge h in Abhängigkeit zur Anzahl der Teilintervalle n ändert. Bei der Simpsonregel wird sie ebenfalls durch den Term $h = \frac{b-a}{n}$ berechnet.[21]

Werden die beiden Trapeze addiert, ergibt sich:

$$A_1 = \left[\frac{h \cdot \left(f(a) + f(m)\right)}{4}\right] + \left[\frac{h \cdot (f(m) + fb)}{4}\right] = \frac{h \cdot \left(f(a) + 2 \cdot f(m) + f(b)\right)}{4}.$$

Anschließend wird die zweite Fläche berechnet. Da die Fläche ein Rechteck ist, ergibt sich der Flächeninhalt aus dem Produkt von der Grundseite und Höhe.

$$A_2 = h \cdot f(m)$$

Die Flächen A_1 und A_2 werden nun im Verhältnis $2:1$ verrechnet, da die beiden Trapeze die Fläche doppelt so genau angeben wie das einzelne Rechteck.

$$A = \frac{2 \cdot A_1 + A_2}{3} = \frac{\frac{h \cdot (f(a) + 2 \cdot f(m) + f(b))}{2} + h \cdot f(m)}{3}$$

$$= \frac{\frac{h \cdot (f(a) + 2 \cdot f(m) + f(b))}{2} + \frac{2 \cdot h \cdot f(m)}{2}}{3} = \frac{h \cdot (f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b))}{6}$$ [22]

Wie hier zu sehen ist, wird die Stützstelle in der Mitte des Intervalls, immer mit dem Faktor vier multipliziert.

Daher lautet die Simpsonregel:

[20] Informationen von: Wilkens (2017). Johannes, S. 5-6.
[21] Wikipedia (Hrsg, 2018). Simpsonregel (eing. 02.02.18).
[22] Informationen von: Wilkens (2017). Johannes, S. 5-6.

$$A_S = \frac{h}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

4.2 Die summierte Simpsonregel

Die Simpsonregel wird für größer werdende Intervalle zunehmend ungenauer, da stets nur drei Punkte betrachtet werden. Deshalb wird ein Trick angewendet um die Genauigkeit wunschgemäß zu steigern. Das gesamte Intervall wird nämlich in beliebig viele kleinere Teilintervalle n unterteilt. Jedes Teilintervall wird dann durch die Simpsonregel berechnet und zu den anderen addiert.

Unterteilen wir nun den Beispielgraphen in $n = 2$ anstatt $n = 1$ Intervalle (siehe Abb. 9[23]), wird der Flächeninhalt folgendermaßen berechnet:

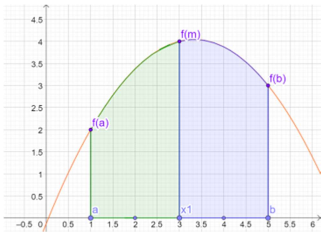

Abb. 9: Aufteilung des Gesamtintervalls in zwei Teilintervalle

$$A = \left(\frac{h}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f(x_1) \right)\right) + \left(\frac{h}{6} \cdot \left(f(x_1) + 4 \cdot f\left(\frac{x_1+b}{2}\right) + f(b) \right)\right)$$

$$= \frac{h}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + 2 \cdot f(x_1) + 4 \cdot f\left(\frac{x_1+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Da x_1 eine Grenze in beiden Teilintervallen ist, wird es mit zwei multipliziert.

Nach diesem Schema wird die Formel auch weiterhin ergänzt, sobald die Anzahl der Teilintervalle erhöht wird. Dieses Schema wird generell folgendermaßen dargestellt:

$$A = \frac{h}{6} \cdot (f(a) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 2 \cdot f(x_4) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-2}) + 4 \cdot f(x_{n-1}) + f(b)).$$

Der Faktor vor dem Funktionswert hat beim ersten und letzten Glied den Wert eins, sowie beim zweiten und vorletzten Glied den Wert zwei. Dazwischen hat der Faktor abwechselnd den Wert zwei und vier, da die Stützstellen abwechselnd Intervallgrenzen und mittlere Stützstellen sind. Die allgemeine Formel für jede Funktion mit einer beliebigen Anzahl an Intervallen lautet daher:

$$A_s = \frac{h}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right).$$

Dabei beschreibt $f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$ jeweils den Mittelpunkt zwischen zwei Stützstellen. [24]

[23] Eigenanfertigung (02.02.2018).
[24] Informationen von: Wikipedia (Hrsg, 2018). Simpsonregel (eing. 02.02.18).

4.3 Genauigkeit

Wie auch beim Sehnen-Trapez-Verfahren berechne ich das Integral im Intervall [0; 1] und [3; 5] für die Funktionsgleichung $f(x) = x \cdot e^x$.

Beispiel 1: $f(x) = x \cdot e^x$; $[0; 1]$; $h = \frac{1-0}{n}$

Teil-inter-valle n	Eingesetzte Werte in die allgemeine Formel	Ergebnis
1 $h = 1$	$A_S = \frac{1}{6} \cdot \left(f(0) + 4 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right)$	$\approx 1{,}002620$ $Fehler < 10^{-2}$
5 $h = \frac{1}{5}$	$A_s = \frac{1}{30} \cdot \left(f(0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} f(x_i) + f(1) \right)$	$\approx 1{,}0000043$ $Fehler < 10^{-5}$
10 $h = \frac{1}{10}$	$A_s = \frac{1}{10} \cdot \left(f(0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{9} f(x_i) + f(1) \right)$	$\approx 1{,}0000002$ $Fehler < 10^{-6}$
100 $h = \frac{1}{100}$	$A_s = \frac{1}{100} \cdot \left(f(0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{100} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} f(x_i) + f(1) \right)$	$\approx 1{,}00000000003$ $Fehler < 10^{-10}$

Die genauste Berechnung per Integration ergibt: $\int_0^1 x \cdot e^x \, dx = 1$.

Beispiel 2: $f(x) = x \cdot e^x$; $[3;\ 5]$; $h = \frac{5-3}{n}$

Teil-inter-valle n	Eingesetzte Werte in die allgemeine Formel	Ergebnis
1 $h = 2$	$A_S = \frac{1}{3} \cdot \left(f(3) + 4 \cdot f(4) + f(5) \right)$	$\approx 558{,}63093$ $Fehler < 10^{1}$
5 $h = \frac{2}{5}$	$A_s = \frac{1}{15} \cdot \left(f(3) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} f(x_i) + f(5) \right)$	$\approx 553{,}49098$ $Fehler < 10^{-1}$
10 $h = \frac{1}{5}$	$A_s = \frac{1}{30} \cdot \left(f(3) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{10} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{9} f(x_i) + f(5) \right)$	$\approx 553{,}48215$ $Fehler < 10^{-2}$
100 $h = \frac{1}{50}$	$A_s = \frac{1}{300} \cdot \left(f(3) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{100} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} f(x_i) + f(5) \right)$	$\approx 553{,}481562$ $Fehler < 10^{-5}$

Die genauste Berechnung per Integration ergibt: $\int_3^5 x \cdot e^x \, dx \approx 553{,}48156$.

Wie anhand der Werte zu sehen ist, kann die Annäherung per Simpsonregel schon bei kleinen Werten für n relativ genau sein. In Beispiel 1 ist der Fehler schon bei einem einzigen Intervall

nur kleiner als 10^{-2}, also ist das Integral auf die ersten beiden Nachkommastellen genau angenähert. Wird die Anzahl der Intervalle auf fünf erhöht, ist der Fehler schon kleiner als 10^{-5}. Diese Genauigkeit reicht für die meisten praktischen Anwendungsfälle schon aus, allerdings ist eine höhere Genauigkeit ebenfalls möglich. So kann mit 100 Intervallen das Integral auf die ersten zehn Nachkommastellen exakt angegeben werden.
Das Intervall in Beispiel 2 wird allerdings nicht so genau berechnet wie im Beispiel 1. Dort liegt der Fehler bei einem Intervall noch bei $< 10^1$, was starke Auswirkungen auf die Genauigkeit hat. Dieser große Fehler nimmt mit Zunahme der Intervalle jedoch sehr stark ab. Bereits nach Verfünffachung der Intervalle ist der Fehler um zwei Zehnerpotenzen gesunken, was in dieser Größenordnung einen bedeutenden Unterschied macht. Im Beispiel 2 ist der Fehler bei 100 Intervallen jedoch trotzdem um fünf Zehnerpotenzen höher als bei Beispiel 1. Diese unterschiedliche Genauigkeit folgt aus dem Verlauf der Funktion in den beiden Intervallen.

4.4 Vor- und Nachteile

Analog zum Sehnen-Trapez-Verfahren steht bei der Simpsonregel die Ungenauigkeit im Vordergrund. Wie in den Beispielen zu sehen, ist diese jedoch, je nach Anzahl der Intervalle und abhängig von der Funktion, relativ gering, was ein großer Vorteil dieses Verfahrens ist, da es somit seinen Zweck, ein Integral möglichst genau anzunähern, erfüllt.
Bei Vervielfachung der Intervalle wird die allgemeine Formel wiederum sehr viel komplizierter, was ein schwerwiegender Nachteil ist, da es die Anwendbarkeit des Verfahrens stark einschränkt.
$a = x_0 = 1; b = x_n = 3;\ n = 2; h = 1$

$$\frac{1}{6} \cdot \left(f(1) + 4 \cdot f\left(\frac{1 + (1 + 1)}{2}\right) + 2 \cdot f(1 + 1) + 4 \cdot f\left(\frac{(1 + 1) + 3}{2}\right) + f(3) \right)$$

$a = x_0 = 1; b = x_n = 3;\ n = 4; h = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{12} \cdot \left(f(1) + 4 \cdot f\left(\frac{1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2}\right) + 2 \cdot f\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 4 \cdot f\left(\frac{\left(1 + \frac{2}{2}\right) + \left(1 + \frac{3}{2}\right)}{2}\right) + 2 \cdot f\left(1 + \left(1 + \frac{3}{2}\right)\right) + 4 \cdot f\left(\frac{\left(1 + \frac{3}{2}\right) + 3}{2}\right) + f(3) \right)$$

Wie zu sehen ist, wird die Formel schon bei Erhöhung der Intervalle von zwei auf vier, was noch keine sehr genaue Berechnung liefert, wesentlich länger, obwohl im Prinzip nur neue Funktionswerte in das Schema der allgemeinen Funktion hinzugefügt werden. Das Aufschreiben und Berechnen der Funktion wird daher deutlich aufwändiger, da sehr viele Funktionswerte und Stützstellen berechnet werden müssen.
Damit dies einfacher ist, existiert die allgemeine Formel:

$$A_s = \frac{h}{6} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right).$$

Mit dieser Formel ist das Erweitern sehr simpel, da nur h und n geändert werden müssen. Diese Art der Formel kann allerdings, wie auch bei der Sehnen-Trapez-Regel, nur mit einem CAS berechnet werden. Wenn diese Formel schriftlich gelöst werden soll, muss sie in die lange Form umgeschrieben werden.
Wenn jedoch ein CAS zur Berechnung eingesetzt wird, ist der Zweck der Simpsonregel auf Funktionen beschränkt, bei denen die Stammfunktion nicht gebildet werden kann, da ansonsten auch das Integral sehr leicht exakt berechnet werden kann.
Auch bei der Simpsonregel besteht der Nachteil, dass das Intervall geteilt werden muss, wenn es im positiven und negativen Bereich verläuft und zugleich der Graph innerhalb dieses Intervalls im dritten Quadranten verläuft, da sonst ein negativer Flächeninhalt von dem positiven abgezogen wird. Daher müssen dann die Beträge der Flächen per Hand addiert werden.

5. Die Bode-Regel

Das Sehnen-Trapez-Verfahren (STV) und die Simpsonregel (SR) sind bei weitem nicht alle numerischen Integrationsverfahren, die entwickelt wurden. Allein die Newton-Cotes-Formeln[25] beinhalten viele Verschiedene, unter anderem auch die SR. Ebenfalls eine abgeschlossene Newton-Cotes-Formel ist die so genannte „Bode-Regel".
Die Bode-Regel (BR) ist in den meisten Fällen genauer als beide anderen bereits vorgestellten Verfahren. Sie ist ähnlich aufgebaut wie die beiden anderen, jedoch mit einigen Besonderheiten.
Zunächst lautet die allgemeine Formel:

$$A_B = \frac{4h}{90} \cdot \left(7 \cdot f(x_0) + 32 \cdot f(x_1) + 12 \cdot f(x_2) + 32 \cdot f(x_3) + 7 \cdot f(x_4)\right).$$

Dabei gilt: $h = \frac{b-a}{n};\ x_0 = a;\ x_4 = b$
Das führt schon zu der nächsten Besonderheit. Nämlich ist die BR, da sie ein besonderer Spezialfall ist, nur anwendbar, wenn gilt: $n \; mod \; 4 = 0$. n ist dabei wieder die Anzahl der Intervalle. Daher ist $n + 1$ die Anzahl der Stützstellen für die wiederum gilt:
$(n + 1) \; mod \; 5 = 0$.
Die BR kann ebenfalls aufsummiert werden. Dafür muss die neue Anzahl der Intervalle auch wieder durch vier teilbar sein. Deshalb kann die Anzahl der Intervalle nicht frei variieren, sondern muss Teil der Viererreihe im Einmaleins, oder darüber hinaus, sein. Somit kann b die Werte $x_4, x_8, x_{12}, x_{16}, \dots$ annehmen. [26]
Wird die BR auf die beiden Beispiele angewandt, ergibt sich folgendes:

[25] Numerische Quadraturforme zur Annäherung von Integralen.
Wikipedia (Hrsg.) (2018): Newton-Cotes-Formeln. abrufbar im Internet. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (eingesehen am 02.02.2018).
[26] Informationen von: Spektrum (Hrsg.) (1998): Bode-Regel, abrufbar im Internet. URL: http://www.spektrum.de/lexikon/physik/bode-regel/1800 (eingesehen am 09.02.2018).

Beispiel 1: $f(x) = x \cdot e^x$; $[0;\ 1]$; $h = \frac{1-0}{n}$

Teil-intervalle n	Eingesetzte Werte in die allgemeine Formel	Ergebnis
4 $h = \frac{1}{4}$	$A_B = \frac{1}{90} \cdot \left(7 \cdot f(0) + 32 \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + 7 \cdot f(1)\right)$	$\approx 1{,}000005$ $Fehler < 10^{-5}$
8 $h = \frac{1}{8}$	$A_B = \frac{1}{180} \cdot \left(7 \cdot f(0) + 32 \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{3}{8}\right) + 14 \cdot f\left(\frac{4}{8}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{5}{8}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{6}{8}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{7}{8}\right) + 7 \cdot f(1)\right)$	$\approx 1{,}00000009$ $Fehler < 10^{-8}$

Die genauste Berechnung per Integration ergibt: $\int_0^1 x \cdot e^x \, dx = 1$.

Beispiel 2: $f(x) = x \cdot e^x$; $[3;\ 5]$; $h = \frac{5-3}{n}$

Teil-intervalle n	Eingesetzte Werte in die allgemeine Formel	Ergebnis
4 $h = \frac{1}{2}$	$A_B = \frac{1}{45} \cdot \left(7 \cdot f(3) + 32 \cdot f\left(\frac{7}{2}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{8}{2}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{9}{2}\right) + 7 \cdot f(5)\right)$	$\approx 553{,}51923$ $Fehler < 10^{0}$
8 $h = \frac{1}{4}$	$A_B = \frac{1}{90} \cdot \left(7 \cdot f(3) + 32 \cdot f\left(\frac{13}{4}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{14}{4}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{15}{4}\right) + 14 \cdot f\left(\frac{4}{1}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{17}{4}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{18}{4}\right) + 32 \cdot f\left(\frac{19}{4}\right) + 7 \cdot f(5)\right)$	$\approx 553{,}48222$ $Fehler < 10^{-2}$
12 $h = \frac{1}{6}$	$A_B = \frac{1}{135} \cdot \left(7 \cdot f(3) + 32 \cdot f\left(\frac{19}{6}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{20}{6}\right) + \cdots + 7 \cdot f(5)\right)$	$\approx 553{,}48162$ $Fehler < 10^{-3}$
16 $h = \frac{1}{8}$	$A_B = \frac{1}{180} \cdot \left(7 \cdot f(3) + 32 \cdot f\left(\frac{25}{8}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{26}{8}\right) + \cdots + 7 \cdot f(5)\right)$	$\approx 553{,}48157$ $Fehler < 10^{-4}$

Die genauste Berechnung per Integration ergibt: $\int_3^5 x \cdot e^x \, dx \approx 553{,}48156$.

6. Vergleich der Genauigkeit der verschiedenen Verfahren

Es ist direkt auffällig, wie genau das Integral mittels der BR im Gegensatz zu den beiden anderen Verfahren angenähert werden kann. Bei nur vier Intervallen beziehungsweise fünf Stützstellen wird in Beispiel 1 ein Fehler von kleiner als 10^{-5} erreicht. Im Vergleich: Das STV liefert bei fünf Intervallen lediglich einen von kleiner als 10^{0}. Die SR schafft diese Genauigkeit zwar mit fünf Intervallen auch, braucht um einen Fehler von kleiner als 10^{-8} zu erreichen allerdings über zehn Intervalle, während die BR nur acht benötigt.
Im Beispiel 2 sieht es ganz ähnlich aus. Den Fehler von kleiner als 10^{0}, für den das STV 100 Intervalle benötigt, erzielt die BR bereits mit vier. Die SR ist ähnlich genau, aber immer ein wenig unpräziser als die BR. So wird ein Fehler von kleiner als 10^{-2} mit acht (BR) und zehn (SR) Intervallen erreicht.

Anzumerken ist, dass das Berechnen mit der BR für eine zunehmende Anzahl an Intervallen, auch deutlich aufwändiger und komplizierter ist als bei den anderen Verfahren. Das resultiert aus dem Schema der Formel, da für jedes neue Intervall vier Teilterme mit jeweils unterschiedlichen Faktoren zur Formel hinzugefügt werden müssen und zusätzlich, wie bei dem STV und der SR auch, h neu berechnet und damit die bereits vorhandenen Teilterme angepasst werden müssen.

7. Fehlerabschätzung

Folgende Funktionsgleichung und Werte sind gegeben:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$[0;\ 1]$

Berechnung mit den drei kennengelernten Verfahren für Intervalle n:

Teilintervalle n	Sehnen-Trapez-Verfahren	Simpsonregel	Bode-Regel	Exaktes Integral
4 $h = \frac{1}{4}$	$\approx 0{,}78279411$ Fehler $\leq 10^{-2}$	$\approx 0{,}78539812$ Fehler $\leq 10^{-7}$	$\approx 0{,}7855294$ Fehler $\leq 10^{-3}$	$\frac{\pi}{4}$ $\approx 0{,}785398163$
8 $h = \frac{1}{8}$	$\approx 0{,}78474712$ Fehler $\leq 10^{-2}$	$\approx 0{,}785398162$ Fehler $\leq 10^{-8}$	$\approx 0{,}78539852$ Fehler $\leq 10^{-6}$	$\frac{\pi}{4}$ $\approx 0{,}785398163$
12 $h = \frac{1}{12}$	$\approx 0{,}7851088$ Fehler $\leq 10^{-3}$	$\approx 0{,}78539816334$ Fehler $\leq 10^{-10}$	$\approx 0{,}785398174$ Fehler $\leq 10^{-7}$	$\frac{\pi}{4}$ $\approx 0{,}78539816339$

Mit solchen Beispielrechnungen kann man zeigen, wie sich die Regeln in etwa gegenüber einander verhalten und wie genau sie mit welcher Anzahl an Intervallen sind. Zum Beispiel sieht man auch, dass die BR nicht in jedem Fall genauer ist, als die SR.

Wenn aber mit einem von diesen Verfahren, oder auch Regeln, gezielt ein Integral berechnet werden soll und die Genauigkeit eine wichtige Rolle spielt, kann man nur durch Ausprobieren und stetiges Erhöhen von n die gewünschte Genauigkeit erreichen. Da diese Methode sehr unpraktisch und aufwändig ist, wurde eine Formel entwickelt, mit deren Hilfe für eine gewünschte Genauigkeit die benötigte Anzahl an Intervallen ausgegeben werden kann.

Es gilt beispielsweise für das STV:

$$\int_a^b f(x)dx = A_T + |E(f)|.$$

Da die Fläche durch die numerischen Integrationsverfahren nicht exakt berechnet werden können, wird in dieser Gleichung ein so genanntes *Restglied* hinzugefügt. Dieses Restglied beschreibt die Fläche, die zu viel oder zu wenig berechnet wurde, und bildet somit den Fehler ab. Dieser Fehler wird durch den Ausdruck $E(f)$ bezeichnet. Dabei ist es nicht relevant, ob das Restglied positiv oder negativ ist, weshalb es in Betragsstriche gesetzt wird.

Für die Abschätzung dieses Fehlers $E(f)$ gibt es für jedes der drei numerischen Integrationsverfahren eine Formel.[27]

Sehnen-Trapez-Verfahren:

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(II)}(x) \right|$$ [28]

$$\leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(II)}(x) \right|$$

Simpson-Regel:

$$|E(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot h^4 \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(IV)}(x) \right|$$ [29]

$$\leq \frac{(b-a)^9}{2880n^4} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(IV)}(x) \right|$$

Bode-Regel:

$$|E(f)| \leq \frac{8}{945} \cdot h^7 \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(VI)}(x) \right|$$ [30]

$$\leq \frac{8(b-a)^7}{945n^7} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(VI)}(x) \right|$$

Der Fehler wird hierbei nicht exakt berechnet, sondern lediglich abgeschätzt. Deshalb wird ein Wert ausgegeben, der den maximal möglichen Fehler bei einer bestimmten Anzahl an Intervallen n angibt.

Da die Intervallgrenzen a und b gegeben sind, kann entschieden werden ob zu einer festgelegten Anzahl n die Größe des Fehlers oder die benötigte Anzahl an Intervallen n bei einem vorher festgelegtem, maximalen Fehler berechnet werden soll. Im praktischen Anwendungsfall ist meistens letzteres das gewählte Vorgehen.

Dafür werden für $|E(f)| < 1$ die Formeln folgendermaßen umgestellt:

Sehnen-Trapez-Verfahren:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12 \cdot |E(f)|} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| f^{(II)}(x) \right|}$$

Simpson-Regel:

[27] Informationen von: Wikipedia (Hrsg.) (2017): Trapezregel. abrufbar im Internet. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Trapezregel#Fehlerabsch%C3%A4tzung (eingesehen am 16.02.2018).
[28] Wikipedia (Hrsg, 2017). Trapezregel (eing. 16.02.18).
[29] Wikipedia (Hrsg, 2018). Simpsonregel (eing. 16.02.18).
[30] Hochschule für Technik und Architektur Bern (Hrsg.) (1996): Numerische Integration. In: Ausgabe: 1996/98, G. Krucker. abrufbar im Internte. URL: http://www.krucker.ch/Skripten-Uebungen/IAMSkript/IAMKap7.pdf (eingesehen am 16.02.2018).

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^9}{2880 \cdot |E(f)|} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)|}$$

Bode-Regel:

$$n \geq \sqrt[7]{\frac{8(b-a)^7}{945 \cdot |E(f)|} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(VI)}(x)|}$$

In diese Formel können nun die bekannten Werte a und b und ein gewünschter Fehler für $E(f)$ eingesetzt werden. Der Ausdruck $\max_{a \leq x \leq b} \left|f^{(k)}(x)\right|$ beschreibt den Maximalwert der „k-ten" Ableitung von x im Intervall $[a;\ b]$. Daher muss für diese Ableitung der lokale Extrempunkt gesucht werden. Zu beachten ist, dass von der Fehlerabschätzungsformel nur Gebrauch gemacht werden kann, wenn die Funktion „k-mal" stetig differenzierbar ist.

7.1 Anwendung der Fehlerabschätzung

Beispiel 1:

Gegeben: $f(x) = e^x$; $[0;\ 1]$; $E(f) \leq 10^{-6}$

Exakte Berechnung ergibt: 1,71828182.

Da jede Ableitung von $f(x) = e^x$ gleich, nämlich e^x, ist, bleibt der Wert für $\max_{a \leq x \leq b} \left|f^{(k)}(x)\right|$ bei jeder Fehlerabschätzungsformel gleich. Deshalb berechne ich diesen direkt am Anfang (Rechnung siehe Anhang): $max_{0 \leq x \leq 1} |e^x| = e$.

Sehnen-Trapez-Verfahren:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12 \cdot |E(f)|} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(II)}(x)|}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{(1-0)^3}{12 \cdot 10^{-6}} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(II)}(x)|}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{250000}{3} \cdot |e|}$$

$$n \geq 475{,}9$$

Probe: $n = 476; h = \frac{1}{476}$

$$\frac{1}{952} \cdot \left(f(0) + 2 \sum_{i=1}^{475} f\left(0 + i \cdot \frac{1}{476}\right) + f(1) \right) = 1{,}7182824$$

$$|E(f)| = |1{,}7182818 - 1{,}7182824| = 0{,}0000006$$

$$0{,}0000006 = 6 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$$

Simpson-Regel:

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^9}{2880 \cdot |E(f)|} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(IV)}(x)|}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(1-0)^9}{2880 \cdot 10^{-6}} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(IV)}(x)|}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{3125}{9} \cdot e}$$

$$n \geq 5{,}5$$

Probe: $n = 6, h = \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{36} \cdot \left(f(0) + \sum_{i=1}^{6} f\left(\frac{0 + i \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 0 + i \cdot \frac{1}{6}}{2} \right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{3} f\left(0 + i \cdot \frac{1}{6}\right) + f(1) \right) = 1{,}7182822$$

$$|E(f)| = |1{,}7182818 - 1{,}7182822| = 0{,}0000004$$

$$0{,}0000004 = 4 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$$

Bode-Regel:

$$n \geq \sqrt[7]{\frac{8(b-a)^7}{945 \cdot |E(f)|} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(VI)}(x)|}$$

$$n \geq \sqrt[7]{\frac{8^7}{945 \cdot 10^{-6}} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f^{(VI)}(x)|}$$

$$n \geq \sqrt[7]{\frac{2097152}{945 \cdot 10^{-6}} \cdot e}$$

$$n \geq 4{,}1$$

Da mindestens $4{,}1$ Intervalle benötigt werden, um einen Fehler von $\leq 10^{-6}$ zu erreichen, müssen für die Probe 8 Intervalle verwendet werden, weil die BR nur anwendbar ist, wenn $n \bmod 4 = 0$ gilt.

Probe: $n = 8, h = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{180} \cdot \left(7 \cdot f(0) + 32 \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + 12 \cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + \cdots + 14 \cdot f\left(\frac{4}{8}\right) + \cdots + f(1) \right) = 1{,}71828184$$

$$|E(f)| = |1{,}71828182 - 1{,}71828184| = 0{,}00000002$$

$$0{,}00000002 = 2 \cdot 10^{-8} < 10^{-6}$$

In diesem Beispiel sieht man sehr genau wie unterschiedlich genau die verschiedenen Verfahren sind. Die SR kommt bei gleicher Funktion, gleichem Intervall und gleicher Genauigkeit mit

$\frac{3}{238}$ der Intervalle aus, die das STV benötigt. Was in diesem Beispiel ebenfalls gut zu sehen ist, ist dass die BR theoretisch mit 1,4 Intervallen weniger auskommt als die SR, im praktischen Anwendungsfall jedoch zwei Intervalle mehr benötigt werden, weil die Intervalle bei der BR nur in vierer Schritten erhöht werden können.

Beispiel 2:

Gegeben: $f(x) = \sin x$; $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $E(f) \leq 10^{-6}$

Exakte Berechnung ergibt: 1.

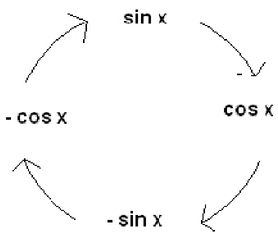

Abb.10: Ableitungskreislauf der Sinus- und Cosinusfunktionen.

Die Sinus- und Cosinusfunktionen bilden zusammen ein Ableitungskreislauf (siehe Abb. 10[31]). In der Abbildung stellt jeder Pfeil einen Ableitungsvorgang dar. Somit gilt beispielsweise: $(\sin x)' = \cos x$. Bei den folgenden Rechnungen werden die Maxima von $\sin x$ und $-\sin x$ benötigt. Diese rechne ich vorab aus (Rechnung siehe Anhang).

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| f^{(IV)}(x) \right| = \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |\sin x| = 1$$

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| f^{(II)}(x) \right| = \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| f^{(VI)}(x) \right| = \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |-\sin x| = 1$$

Sehnen-Trapez-Verfahren:

$$n \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \cdot 10^{-6}} \cdot 1}$$

$$n \geq 568{,}3$$

Somit werden mindesten 569 Intervalle benötigt, um einen Fehler von kleiner als oder gleich 10^{-6} zu garantieren.

Simpson-Regel:

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^9}{2880 \cdot 10^{-6}} \cdot 1}$$

$$n \geq 11{,}9$$

Somit werden mindestens 12 Intervalle benötigt, um einen Fehler von kleiner als oder gleich 10^{-6} zu garantieren.

Bode-Regel:

[31] Wenning-design (Hrsg.) (o.J.): Ableitungskreis für die trigonometrischen Funktionen. abrufbar im Internet. URL: http://www.wenning-design.de/kpim/index.php?thema=10 (eingesehen am 20.02.18).

$$n \geq \sqrt[7]{\frac{8\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{945 \cdot 10^{-6}} \cdot 1}$$

$$n \geq 5{,}7$$

Somit werden mindestens 8 Intervalle benötigt, um einen Fehler von kleiner als oder gleich 10^{-6} zu garantieren.

Auch hier ist wieder zu sehen, dass die BR zwar sehr genau ist, allerdings dadurch, dass die Intervalle nicht beliebig gewählt werden können, wieder mehr Intervalle verwendet werden müssen als theoretisch nötig. Zusätzlich wird hier der Genauigkeitsunterschied zwischen dem STV und der SR deutlich.

8. Einsatzmöglichkeiten

Wie am Anfang dieser Facharbeit schon gesagt, ist grundsätzlich anzumerken, dass die Einsatzmöglichkeiten nur vorhanden sind, wenn die Stammfunktion nicht gebildet werden kann oder bei einer sehr komplexen Funktion kein CAS zu Verfügung steht.
Sollte aber einer dieser Fälle eintreten, schaffen die drei betrachteten Verfahren Abhilfe. Allerdings ist, falls kein CAS zur Verfügung steht, die Berechnung von Integralen mit diesen Verfahren sehr kompliziert und aufwändig, da die zu berechnenden Formeln, wie in den Beispielen zu sehen ist, sehr lang und kompliziert werden und somit viele Funktionswerte berechnet werden müssen. Zusätzlich ist es extrem aufwändig die Fehlerabschätzungsformeln per Hand auszurechnen, da bei der BR beispielsweise die siebte Wurzel gezogen werden muss. Deshalb ist die Einsatzmöglichkeit ohne CAS eher beschränkt.
Wenn jedoch ein CAS zur Verfügung steht, sind diese Schwierigkeiten beim STV und der SR nicht mehr vorhanden, da die Formel mithilfe von Summenklammern sehr kompakt gehalten werden kann. Lediglich bei der BR ist der Aufwand noch immer relativ groß, sobald mehr als vier Intervalle berechnet werden müssen, da diese nicht mit Summenklammern vereinfacht werden kann und deshalb der Eingabeaufwand sehr hoch ist.
Oftmals werden jedoch gar nicht viele Intervalle benötigt, da die BR das Integral sehr genau berechnet. Bei Betrachtung der Genauigkeit, ist das STV sehr ungeeignet, da, wie bei der Fehlerabschätzung zu sehen ist, im Vergleich zu der SR ein Vielfaches der Intervalle benötigt wird, ohne einen genaueren Wert zu erlangen. Dabei ist die Berechnung durch die SR nur minimal aufwändiger.
Doch auch das STV hat einen gewissen Vorteil gegenüber den anderen beiden Verfahren. Nämlich in dem Punkt, dass nur das lokale Maximum der zweiten Ableitung berechnet werden muss. Somit werden vier Ableitungen benötigt um diesen Hochpunkt zu berechnen. Wenn ganzrationale Funktionen berechnet werden, wird also eine Funktion vierten Grades benötigt. Bei der Fehlerabschätzungsformel für die SR und BR werden die ersten sechs beziehungsweise acht Ableitungen benötigt. Dass eine Funktion so oft stetig differenzierbar ist, kommt sehr selten vor. Oftmals nur bei Funktionen wie sie in den Beispielen verwendet werden,

nämlich solche, die durch das Ableiten nicht verändert werden (e^x) oder die einen Kreislauf bilden ($\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x$). Daher ist die praktische Anwendbarkeit dieser Fehlerabschätzungen extrem gering und deshalb das Berechnen eines Flächeninhaltes mit einer vorgegebenen Genauigkeit sehr mühselig.

9. Fazit

Schlussendlich kann gesagt werden, dass die Überlegungen, die schon vor mehreren hundert Jahren gemacht wurden, um solche Verfahren zu entwickeln, sehr komplex und damit beeindruckend sind.
Allerdings ist die Informationsbeschaffung sowohl im Internet als auch in Fachbüchern relativ beschwerlich, da selten eine möglichst simple Herleitung der Verfahren zu finden ist und in verschiedenen Quellen auch sehr verschiedene Arten der Niederschrift zu finden sind. Somit musste ich vieles durch eigenständiges Ausprobieren und eigene Überlegungen selbst herleiten. Besonders schwierig war die Vorstellung der Bode-Regel, da dies ein mathematisches Verfahren ist, welches nur selten Anwendung findet und daher nur wenige Quellen existieren in denen Informationen zu finden sind.
Doch gerade aufgrund dieser Schwierigkeiten ist das Thema für mich sehr interessant und ich habe viel gelernt, weil der benötigte Eigenanteil an Herleitungen und mathematischen Überlegungen, um zum Ziel zu kommen, sehr hoch ist.

10. Anhang

Abkürzungsverzeichnis:

STV: Sehnen-Trapez-Verfahren
SR: Simpsonregel
BR: Bode-Regel
CAS: Computeralgebrasystem

Fehlerabschätzung: Rechnung für Beispiel 1:

Bedingung für $max_{0\leq x\leq 1}|f^k(x)|$: $f^{k+1}(x) = 0 \ \wedge \ f^{k+2}(x) \neq 0.$

Da e^x nicht den Wert 0 annehmen kann, müssen in diesem Fall die Randextrema betrachtet werden.

$$f^k(0) = e^0 = 1$$
$$f^k(1) = e^1 = e$$

Das lokale Maximum liegt bei $f^k(1) = e^1 = e$.

Deshalb gilt für die folgenden drei Beispielaufgaben: $max_{0\leq x\leq 1}|f^k(x)| = e$.

Fehlerabschätzung: Rechnung für Beispiel 2:

Bedingung für $max_{0\leq x\leq \frac{\pi}{2}}|\sin x|$: $\cos x = 0 \ \wedge \ -\sin x \neq 0.$

Bekanntlich liegen die Nullstellen bei einer Cosinusfunktion immer bei $x_n = \frac{2n+1}{2}\pi \ |n \in \mathbb{N}$.

Da in unserem Intervall lediglich eine Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$ zu finden ist, wird diese in den Funktionsterm $-\sin x$ eingesetzt: $-\sin\frac{\pi}{2} = -1$. Da der Betrag vom Maximum genommen wird, wird die Eins positiv.

Bedingung für $max_{0\leq x\leq \frac{\pi}{2}}|-\sin x|$: $-\cos x = 0 \ \wedge \ \sin x \neq 0$

Da das negative Vorzeichen der Cosinusfunktion die Nullstellen nicht verschiebt, liegen sie immer noch bei $x_n = \frac{2n+1}{2}\pi \ |n \in \mathbb{N}$. Deshalb liegt die zu betrachtende Nullstelle noch immer bei $\frac{\pi}{2}$. Eingesetzt in den Term $\sin x$ ergibt sich: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

11. Literaturverzeichnis

Champcademy (Hrsg.) (2017): Trapezregel. Abrufbar im Internet. URL: https://www.youtube.com/watch?v=BZbzdsvpc3c&index=1&list=PLFT-PqvNIlJS0hdmYMd9ad9137JzZfGMxn (eingesehen am 20.01.2018).

Fernuni-Hagen (Hrsg.) (o. J.): Numerische Integration. abrufbar im Internet. URL: http://mathe-online.fernuni-hagen.de/MIB/HTML/node110.html (eingesehen am 20.01.2018).

Hochschule für Technik und Architektur Bern (Hrsg.) (1996): Numerische Integration. In: Ausgabe: 1996/98, G. Krucker. abrufbar im Internte. URL: http://www.krucker.ch/Skripten-Uebungen/IAMSkript/IAMKap7.pdf (eingesehen am 16.02.2018).

Integralrechnung (Hrsg.) (o.J.): Geschichte der Integralrechnung. Abrufbar im Internet. URL: http://www.integralrechnung.net/geschichte.html (eingesehen am 20.01.2018).

Lernhelfer (Hrsg.) (2010): Numerische Integration. abrufbar im Internet. URL: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/numerische-integration (eingesehen am 20.01.2018).

Spektrum (Hrsg.) (1998): Bode-Regel, abrufbar im Internet. URL: http://www.spektrum.de/lexikon/physik/bode-regel/1800 (eingesehen am 09.02.2018).

Uni-Göttingen (Hrsg.) (2013): abrufbar im Internet. URL: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/7493 (eingesehen am 20.01.18).

Wikipedia (Hrsg.) (2018): Simpsonregel. abrufbar im Internet. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (eingesehen am 02.02.2018).

Wikipedia (Hrsg.) (2017): Trapezregel. Abrufbar im Internet URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Trapezregel#Fehlerabsch%C3%A4tzung (eingesehen am 16.02.2018).

Wilkens, Robin: Johannes Kepler – Die Keplersche Fassregel, unveröffentlichte Hausarbeit, Scheeßel 2017, S. 4-6.

12. Abbildungsverzeichnis

Kursleiter:	Herr Frick
Kurs:	1sf7
Zeitraum:	10.01. – 23.02.2018

13. Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Facharbeit selbständig angefertigt habe, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

02.03.2018 ....