

*Facharbeit im Rahmen der gymnasialen
Oberstufe im Leistungskursfach
Mathematik*

Thema:

**Vorstellung der
mathematischen
Modellierung von
Verkehrsstaubbildung nach
Nagel-Schreckenberg**

& Überlegungen zur Erweiterung
des Modells bei Stauauflösung

Verfasser: Moritz Bender
Fach: Leistungskursfach Mathematik
Betreuungslehrer: Hans Prisack
Schule: Hardtberg-Gymnasium-Bonn
Abgabe am: 09.03.2018

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	S. 3
2. Vorstellung des Nagel-Schreckenberg-Modells	S. 3
2.1 Beispielhafte Erläuterung	S. 4
2.2 Diagrammvorstellung	S. 5
2.3 Erläuterung von Verkehrsdichten- und Verkehrsflussberechnung	S. 5
2.4 Realitätsvergleich	S. 6
2.5 Fundamentaldiagramm	S. 7
3. Vorstellungen möglicher Erweiterungen für das Nagel-Schreckenberg-Modell	S. 8
3.1 VDR-Erweiterung	S. 8
3.1.1 Metastabile Hochflussphasen mit VDR	S. 9
3.2 Bremslicht-Erweiterung	S. 10
3.3 Mehrspurverkehr	S. 11
3.4 Lkw-Erweiterung	S. 13
4. Beschreibung der Stauauflösung mit Hilfe des Nagel-Schreckenberg-Modells	S. 13
4.1 Kontrollversuch	S. 13
4.2 Geschwindigkeitsbeschränkung	S. 13
4.3 Spurerweiterung	S. 14
4.4 Bremslicht-Erweiterung	S. 15
5. Fazit	S. 16
6. Literaturverzeichnis	S. 17
7. Anhang	S. 18
7.1 Variablenübersicht	S. 18
7.2 Definitionen	S. 18
7.3 Beweis: Das Nagel-Schreckenberg-Modell ist ein minimales Modell	S. 19
7.4 Beispielhaftes Nagel-Schreckenberg-Diagramm	S. 20
7.5 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell	S. 20
7.6 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR-Erweiterung	S. 21
7.7 Graphische Darstellung der Bremslichterweiterung	S. 21
7.8 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell bei Mehrspurverkehr	S. 22
7.9 Graphische Darstellung der Lkw-Erweiterung	S. 23
7.10 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell mit Lkw-Erweiterung	S. 23
7.11 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Kontrollversuch	S. 23
7.12 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Geschwindigkeitsbeschränkung	S. 24
7.13 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Spurerweiterung	S. 25
7.14 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Bremslicht-Erweiterung	S. 26
8. Eidesstattliche Erklärung	S. 27

1. Einleitung

Besonders in den Ferien kennt man folgendes Szenario: Man möchte in den Süden, zum Beispiel in die Provence, fährt auf der Autobahn bei dichtem Verkehr und plötzlich bremst alles. Auf allen drei Spuren steht man oder rollt nur noch im Schrittempo vorwärts. Nach einiger Zeit geht es dann wieder schneller, bis es wie zu Beginn einfach nur dichter Verkehr ist. Man fragt sich: Was war das eben für ein Stau? Wo bleibt die Ursache, ich habe weder eine Baustelle noch einen Unfall gesehen? Staus entstehen doch nicht aus dem Nichts!

Diese „Staus aus dem Nichts“ sind das Thema dieser Facharbeit. Wie entstehen sie, wie lassen sie sich vorhersagen oder berechnen und zuletzt, wie lassen sie sich verhindern?

2. Vorstellung des Nagel-Schreckenberg-Modells

Das Nagel-Schreckenberg-Modell (NaSchr-Modell) ist ein Modell, welches der Simulation von Stautentstehung dient. Es wurde von den theoretischen Physikern Kai Nagel und Michael Schreckenberg entwickelt. Es setzt sich aus folgenden Teilen zusammen¹:

Für das Modell wird die Straße in L $7,5m$ lange **Zellen** $L = 1, 2, \dots, L$ diskretisiert. Das entspricht etwa der Länge eines durchschnittlichen Pkw in einem Stau inklusive eines kleinen Sicherheitsabstands. Jede Zelle kann entweder von einem Fahrzeug „besetzt“ sein, oder sie ist „frei“. Ein Fahrzeug kann also keine Zellgrenzen überschreiten.

Jedes Fahrzeug hat eine eigens zugewiesene diskrete **Geschwindigkeit** $v = 1, 2, \dots, v_{max}$, die der zurückgelegten Zellenzahl pro Runde entspricht. Bewegt wird von links nach rechts, 0 ist ein stehendes Fahrzeug, 1 beschreibt ein Fahrzeug mit $27km/h$. Diese Geschwindigkeiten ergeben sich durch die durchfahrenen Zellen, eine Zelle macht $7,5m$, die in einer Runde, also einer Sekunde, durchquert wird. $7,5m/s$ oder $27km/h$ ist die Geschwindigkeitsstufe 1. Es ergibt sich proportional linear für Stufe 5 $135km/h$.

Die **Zeit** wird ebenfalls in eine Zellautomatenstruktur diskretisiert. Es gibt **Runden**, eine ist 1 Sekunde lang und gilt für alle Fahrzeuge im System. Eine Sekunde ist die durchschnittliche Reaktionszeit eines Autofahrers. Zudem lassen sich mit $t = 1s$ die realistischsten Ergebnisse erreichen.

In jeder Runde $t \rightarrow t + 1$, wird für jedes Fahrzeug f im System eine Geschwindigkeitsberechnung und eine Ortsberechnung durchgeführt.

Die **Geschwindigkeitsberechnung** setzt sich aus drei Schritten zusammen, die chronologisch durchgeführt werden:

1. Für das **Beschleunigen** gilt: Hat ein Fahrzeug noch nicht v_{max} erreicht, so wird die Geschwindigkeit um eine Stufe erhöht.

$$v \rightarrow v \begin{cases} +1 & \text{falls } v < v_{max} \\ +0 & \text{falls } v = v_{max} \end{cases}$$

2. Für den **Sicherheitsabstand** gilt: Ist vor dem Fahrzeug in Zelle x ein Fahrzeug in Zelle $x + k$ ($k \leq v$), wird die Geschwindigkeitsstufe v auf die Anzahl der freien Zellen reduziert.

$$v \rightarrow k - 1$$

3. Des Weiteren können Verkehrsteilnehmer, die schneller als Geschwindigkeitsstufe 0 sind, **trödeln**, was mit der Wahrscheinlichkeit p ausgedrückt wird, nach der sich die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs um eine Stufe verringert.

¹ aus /1/, S. 3

$$v \rightarrow v - 1$$

Der Ort eines Fahrzeugs wird mit einer **Ortsberechnung** durchgeführt, nach der alle Fahrzeuge um v Felder nach vorne versetzt werden.

$$x \rightarrow x + v$$

Diese Schritte beschreiben unterschiedliche Ereignisse im Straßenverkehr. Beschleunigen steht für den Gedanken des Autofahrers, immer so schnell wie möglich zu sein. Der Sicherheitsabstand ist gesetzlich vorgeschrieben und verhindert Auffahrunfälle. Zudem beinhaltet er die Wechselwirkung zwischen Fahrzeugen. Der dritte Teil vereinigt verschiedene Faktoren: Einerseits den Faktor Mensch, nach dem jeder individuell ist und unerwartet oder nicht physikalisch nachvollziehbar handelt. Dabei geht es besonders um Überreaktionen beim Bremsen, wonach ein Fahrzeug zum Stehen kommt und einen Stau auslöst. Andererseits geht es um Umweltbedingungen, wie Kurven oder uneinsichtige Kreuzungen, die zum Abbremsen zwingen.

2.1 Beispielhafte Erläuterung

Im Folgenden soll ein Verkehrsfluss auf einem einspurigen Kreis simuliert werden. Die Geschwindigkeitsbeschränkung beträgt 100km/h , was $v_{max} = 4$ ergibt. Der Simulationsabschnitt ist 75m lang und wird in 10 gleich lange Zellen geteilt.

Es befinden sich drei Fahrzeuge in diesem Abschnitt, das Fahrzeug „A“ mit einer Geschwindigkeit von 3 in Zelle 1, ein Fahrzeug „B“ in Zelle 5 mit der Geschwindigkeit 2 und ein Fahrzeug „C“ in Zelle 9 mit der Geschwindigkeit 4.

Zelle 1	Zelle 2	Zelle 3	Zelle 4	Zelle 5	Zelle 6	Zelle 7	Zelle 8	Zelle 9	Zelle 10
A 3				B 2				C 4	

Nun werden Geschwindigkeits- und Ortsberechnung für alle Fahrzeuge durchgeführt. Die Geschwindigkeitsberechnung wird beispielhaft an Fahrzeug „A“ gezeigt:

Das Fahrzeug hat noch nicht die Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 4$ erreicht, die **Geschwindigkeit** wird um eine Stufe erhöht.

$$v_A = 3 + 1 = 4$$

Vor Fahrzeug „A“ sind nur 3 Zellen frei, die Geschwindigkeit muss auf 3 gedrosselt werden, um den **Sicherheitsabstand** zu wahren.

$$v_A = 3$$

Die **Trödelwahrscheinlichkeit** ist $p = \frac{1}{3}$, der Fahrer von Fahrzeug „A“ reagiert zu stark beim Bremsen und verringert seine Geschwindigkeit um 1.

$$v_A = 3 - 1 = 2$$

Die Ortsberechnung ergibt, dass Fahrzeug „A“ um 2, Fahrzeug „B“ um 3 und Fahrzeug „C“ um 4 Zellen nach vorne versetzt werden.

Zelle 1	Zelle 2	Zelle 3	Zelle 4	Zelle 5	Zelle 6	Zelle 7	Zelle 8	Zelle 9	Zelle 10
	C3	A 2					B 3		

In einer weiteren Runde ergibt sich folgendes Bild:

Zelle 1	Zelle 2	Zelle 3	Zelle 4	Zelle 5	Zelle 6	Zelle 7	Zelle 8	Zelle 9	Zelle 10
B3	C0			A 2					

Das Fahrzeug „C“ musste auf Grund eines zu niedrigen Abstands zum Fahrzeug „A“ anhalten. Das Fahrzeug „B“ fährt auf und muss in der nächsten Runde ebenfalls anhalten. Es ist ein „Stau aus dem Nichts“ entstanden.

2.2 Diagrammvorstellung

Die wissenschaftliche Darstellung des Nagel-Schreckenberg-Modells erfolgt in einem Diagramm. Auf der x-Achse befindet sich die Straße in Form der Zellen, auf der y-Achse befindet sich die Zeit in Runden. Jede Zeile zeigt die Straße nach einer vollständigen Geschwindigkeitsberechnung und der entsprechenden Bewegung. Eine leere Zelle wird mit einem Punkt dargestellt, eine besetzte mit einer Zahl, die der Geschwindigkeit des in ihr befindlichen Fahrzeugs entspricht (*Beispiel: siehe Anhang S. 20*).

2.3 Erläuterung von Verkehrsdichten- und Verkehrsflussberechnung

Kai Nagel und Michael Schreckenberg geben zur Berechnung der Verkehrsdichte und des Verkehrsflusses auf einem Kreis folgende Formeln an²:

Die Verkehrsdichte ρ an einer Zelle n_i über den Gesamtzeitraum T wird wie folgt berechnet:

$$\rho^{-T} = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} n_i(t)$$

Die Gesamtzeit wird durch die Rundenzahl T geteilt, $\frac{1}{T}$, um die Belegung der Zelle $n_i(t)$ in einem Zeitschritt in Verhältnis zu der Gesamtzeit zu setzen. Anschließend wird die Belegung der Zelle für jeden Zeitschritt bestimmt, indem die Summe von $t_0 + 1$ bis $t_0 + T$ über $n_i(t)$ gebildet wird. Die Belegung kann den Wert 0 annehmen, wenn sie leer ist und den Wert 1, wenn sie belegt ist.

Für die Verkehrsdichte ρ über die Gesamtzeit der Simulation T gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \rho^{-T} = \rho$$

Nähert man T immer weiter der Unendlichkeit an, so erhält man ρ . Es ergibt sich also, dass die Dichte immer gleichbleibt, unabhängig von der Anzahl der Simulationsrunden. Dies muss so sein, da die Fahrzeugzahl und Zellenzahl auf dem Kreis gleichbleiben.

Der Durchschnittsfluss q zwischen der Zelle i und der Nachbarzelle $i + 1$ ist über den Zeitraum T festgelegt mit:

$$q^{-T} = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} n_{i,i+1}(t)$$

Es wird die Gesamtzeit durch die Rundenzahl geteilt, $\frac{1}{T}$, um den Fluss $n_{i,i+1}(t)$ zwischen der Zelle i und der Nachbarzelle $i + 1$ in einem Zeitschritt in Verhältnis zur Gesamtzeit zu setzen. Dann wird der Fluss zwischen den beiden Zellen für jeden Zeitschritt bestimmt, indem die Summe von $t_0 + 1$ bis $t_0 + T$ über $n_{i,i+1}(t)$ gebildet wird. $n_{i,i+1}(t)$ ist 0, wenn kein Fahrzeug die Zellen im Zeitschritt t passiert und 1, wenn ein Fahrzeug passiert.

²aus /1/, S. 4

2.4 Realitätsvergleich

Das NaSchr-Modell ist ein Zellularautomatenmodell und basiert nicht auf empirischen Messungen. Wie ähnlich sind sich Simulation und Wirklichkeit?

Im Folgenden wird eine Verkehrsmessung mit einem Simulationsergebnis verglichen, nach dem Vorbild von Christoph Settgast³:

Abb. 1: Empirische Verkehrsmessung aus J. Treiterer: Ohio State Technical Report, aus Settgast, Christoph: *Die mathematische Modellierung der Staubildung – Analysen mit Hilfe des Nagel-Schreckenberg-Modells zur Verkehrsflussoptimierung*, S. 6

Die Abbildung zeigt einen kurzen „grundlosen Stau“, der bei einem Tempolimit von etwa 105 km/h , entsprechend $v_{max} = 4$ und einer Fahrzeugdichte von $0,15$ Fahrzeugen/Zelle für ungefähr 120 Sekunden existiert. Er bewegt sich entgegen der Fahrtrichtung und löst sich selbstständig wieder auf. Plötzlich abbrechende oder beginnende Linien lassen sich auf Spurwechsel zurückführen.

Abb. 2: Empirische Daten im Nagel-Schreckenberg-Modell, aus Settgast, Christoph: *Die mathematische Modellierung der Staubildung – Analysen mit Hilfe des Nagel-Schreckenberg-Modells zur Verkehrsflussoptimierung*, S. 7, eigene Bearbeitung

Bei Eingabe der Werte, $v_{max} = 4$ und $\rho = 0,15$, ergibt die Simulation ein vergleichbares Bild. Weiße Felder sind leere Zellen, in gelben befinden sich fahrende Fahrzeuge und in roten stehende Fahrzeuge. Es bildet sich ein Stau mit etwa sieben Fahrzeugen, der für etwa 110 Sekunden existiert.

Die Ergebnisse aus der Realität sind mit denen aus der Simulation vergleichbar, es ergibt sich also, dass mit dem NaSchr-Modell realer Verkehr simuliert werden kann.

³ aus /5/, S. 5ff.

2.5 Fundamentaldiagramm

Das Diagramm hat Dichte der Fahrzeuge auf der x-Achse und den Verkehrsfluss auf der y-Achse. Alle Graphen gehen vom Ursprung aus, bei einer Dichte von 0 Fahrzeugen/Zelle und ohne Fluss, zu einer Dichte von 1 Fahrzeug/Zelle, ebenso ohne Verkehrsfluss.

Farbe	Modell	Trödelparameter p	Maximalgeschwindigkeit v
	NaSchr-Modell	0,0	1
	NaSchr-Modell	0,15	1
	NaSchr-Modell mit VDR-Erweiterung	0,15	1
	NaSchr-Modell	0,0	5
	NaSchr-Modell	0,15	5
	NaSchr-Modell mit VDR-Erweiterung	0,15	5

Abb. 3: Fundamentaldiagramme des NaSch[r]- Modells, von wikipedia.org⁴, eigene Bearbeitung

Bei einer Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 1$ ohne Trödeln steigt der Verkehrsfluss linear, bis kurz vor das Flussmaximum. Dieses liegt bei einer Dichte von 0,5 Fahrzeugen/Zelle vor. Es beträgt 0,5 Fahrzeuge/Zeiteinheit, alle zwei Zeiteinheiten betritt ein Fahrzeug eine Zelle. Fahrzeuge und Abstände bewegen sich gleichmäßig, auf eine besetzte Zelle folgt eine leere und da niemand trödelt, kommt es auch zu keiner Bremswelle. Nach dem Maximum fällt der Fluss linear.

Bei der Geschwindigkeit $v_{max} = 5$ und Trödelparameter $p = 0$ steigt der ebenfalls lineare Graph stark, bis er den maximalen Fluss mit $0,8\bar{4}$ Fahrzeugen/Zeiteinheit erreicht. Dieser ist deutlich höher, als bei $v_{max} = 1$. Er liegt bei $0,1\bar{6}$ Fahrzeugen/Zelle, aufgrund des Abstands. Auf eine besetzte Zelle folgen vier leere.

Das Diagramm ergibt, dass sich bei $v_{max} = 1$ und einer Trödeltwahrscheinlichkeit $p = 15\%$ der Fluss mit einem Graph mit beschränktem Verhalten beschreiben lässt. Das Flussmaximum liegt mit $\sim 0,25$ Fahrzeugen/Zeiteinheit bei einer Dichte von 0,5 Fahrzeugen/Zelle vor. Wenn ein Fahrzeug trödelt, müssen alle nachfolgenden anhalten, was den Fluss erheblich verringert.

Gleiches lässt sich auch bei einer Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 5$ beobachten. Der Graph steigt linear bis zu einem Flussmaximum von $\sim 0,62$ Fahrzeugen/Zeiteinheit. Die Fahrzeugdichte liegt dabei bei $\sim 0,12$ Fahrzeugen/Zelle. Anschließend werden die Funktionswerte recht linear kleiner, bis bei der Dichte 1 Fahrzeug/Zelle der Wert 0 erreicht wird. Es ist auffällig, dass sich der Fluss im Verhältnis zum Flussverlust bei $v_{max} = 1$ um einen ähnlichen Betrag, nämlich $\sim 0,25$ Fahrzeugen/Zeiteinheit, verringert. Daraus lässt sich schließen, dass ein bestimmter Trödelfaktor, unabhängig von der Höchstgeschwindigkeit v_{max} , zu einem bestimmten Flussverlust führt.

Eine Simulation mit der VDR-Erweiterung (siehe S. 8) des NaSchr-Modells ergibt bei $v_{max} = 1$ und einem Trödelparameter $p = 15\%$ den Maximalfluss von $\sim 0,175$ Fahrzeugen/Zeiteinheit bei einer Dichte von $\sim 0,4$ Fahrzeugen/Zelle. Es handelt sich um einen beschränkten Graph. Im Vergleich zur Simulation mit einem einfachen identischen Trödelparameter, verringert sich die Straßenkapazität weiter, trotz identischem Trödelparameter.

⁴ siehe /6/

Bei $v_{max} = 5$ ist es vergleichbar. Der Verkehrsfluss nimmt im Vergleich zum Versuch mit gleicher Dichte und gleichem Trödelparameter weiter ab. Das Maximum liegt bei $\sim 0,375$ Fahrzeugen/Zeiteinheit, bei einer Dichte von $\sim 0,125$ Fahrzeugen/Zelle. Der Graph steigt linear bis zum Maximum und fällt nach dem Erreichen recht linear ab. Um das Flussmaximum lässt sich allerdings keine einheitliche Entwicklung beobachten, die Flüsse variieren verhältnismäßig stark, bei ähnlichen Dichten.

3. Vorstellung möglicher Erweiterungen für das Nagel-Schreckenberg-Modell

Das NaSchr-Modell ist ein minimales Modell, das heißt, alle Komponenten des Modells sind zwingend notwendig, um realistischen Straßenverkehr zu simulieren (*Beweis siehe Anhang S. 19*). Auf diese Weise ist es bereits möglich, realistische Ergebnisse mit dem NaSchr-Modell zu erreichen. Es ist allerdings möglich, das Modell auf verschiedene Arten zu erweitern. Im Folgenden werden einige Erweiterungsansätze vorgestellt.

3.1 VDR-Erweiterung

Das Nagel-Schreckenberg-Modell ist noch erweiterungswürdig. Empirische Untersuchungen ergeben, dass Staus sich nicht auflösen, obwohl weniger Fahrzeuge auffahren als ablaufen.

Das lässt sich damit erklären, dass die Fahrer, die aus dem Stau herausfahren eher trödeln, als die, die auf den Stau auffahren. Man versucht, dies mit einer „slow-to-start-Regel“⁵ abzubilden, in diesem Fall handelt es sich um die „Velocity-Dependent-Randomization“¹⁶ (VDR) (geschwindigkeitsabhängiger Zufall). Die Trödelwahrscheinlichkeit p soll von der Geschwindigkeit v des Fahrzeugs f_i abhängig gemacht werden. p wird also zu $p(v)$.

Nach Andreas Schadschneider wird eine „slow-to-start-Regel“ wie folgt definiert:

$$p(v) = \begin{cases} p_0 & \text{falls } v = 0 \\ p & \text{falls } v > 0 \end{cases}$$

wobei $p_0 > p$ gelten soll. Die Regeln des NaSch[r]-Modells sind dann um einen Schritt R0 zu ergänzen, der vor den Regeln R1 – R4 auszuführen ist:

Schritt 0: Bestimmung von $p(i)$

Für jedes Fahrzeug wird der Trödelparameter $p_n = p(v_n(t))$ bestimmt“⁶. Es gilt $n = f_i$. Das bedeutet, dass für jedes Fahrzeug f_i die entsprechende Trödelwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der gefahrenen Geschwindigkeit $p(v_i)$ zugeordnet wird. Dies muss in jedem Zeitschritt t wiederholt werden. Die Geschwindigkeit v bezieht sich auf den vorigen Zeitschritt (*Beispiel: siehe Anhang S. 21*).

⁵ aus /2/, S. 108

⁶ aus /2/, S. 108

3.1.1 Metastabile Hochflussphasen mit VDR

Nach dieser Veränderung lassen sich auch metastabile Hochflussphasen simulieren. Diese wurden in Messungen beobachtet und besagen, dass an einer Stelle ein maximaler Verkehrsfluss bestanden hat, der über dem mit Hilfe des NaSchr-Modells errechneten Wert liegt. Dieser fällt dann stark ab und stellt sich trotz Abnahme der Verkehrsdichte nicht wieder ein.

Abb. 4: Schematisches Fundamentaldiagramm bei metastabilen Hochflussphasen mit VDR, aus Schadschneider, Andreas: *Physik des Straßenverkehrs*, S. 11, eigene Bearbeitung

Die Graphik wird im Folgenden nach dem Vorbild von Andreas Settgest analysiert⁷:

Die Graphik zeigt den Zusammenhang der Verkehrsdichte ρ , der Ausgangsgröße und des Verkehrsflusses q , der zugeordneten Größe bei einer metastabilen Hochflussphase.

Vom Ursprung aus steigt der Verkehrsfluss linear bis zum Hochpunkt M ($\rho_1 \mid q_{max1}$). Dort teilt sich der Graph, ein Ast steigt linear weiter bis P ($\rho_2 \mid q_{max2}$), wo eine Definitionslücke ist, der andere Ast fällt ab dem Maximum linear über die Stelle ρ_2 , bis er die x-Achse schneidet.

Zwischen den Stellen ρ_1 und ρ_2 , in der Nähe des Flussmaximums, gibt es keinen eindeutigen Verkehrsfluss, es sind zwei Verläufe möglich. Es ist aber der einzige Bereich, in dem der Verkehrsfluss q_{max2} möglich ist. In diesem Fall steigt der Fluss über q_{max1} bis zu q_{max2} . Ab dieser Stelle fällt der Verkehrsfluss abrupt auf den geringeren Wert an der Stelle ρ_2 .

Der Fluss war also nicht stabil, sondern metastabil, da er bei einer kleinen Störung zu einem gestauten Fluss zerfällt. Die Differenz zwischen den Flüssen q_2 und q_1 , also $q(\rho_2) - q(\rho_1)$ wird als „capacity drop“⁸ bezeichnet.

Damit diese metastabilen Zustände existieren können, muss die Menge der Fahrzeuge, die den Bereich über einen Zeitraum T verlassen i_{out} , kleiner sein, als die Menge, die gleichzeitig in den Bereich eintritt i_{in} .

Bedingung: $i_{in} > i_{out}$

Diesen „capacity drop“ kann man auch in empirisch gewonnenen Daten sehen:

⁷ aus /5/, S. 13ff.

⁸ aus /2/, S. 10

Abb. 5: Empirisches Fundamentaldiagramm. Jeder Punkt entspricht einer Mittelung über 5 Minuten, aus Schadschneider, Andreas: *Physik des Straßenverkehrs*, S. 10, eigene Bearbeitung

Bei freiem Verkehrsfluss, also einer geringen Verkehrsdichte, steigt der Fluss linear zur Dichte (*blaue Markierung*), von ~ 1200 Fahrzeugen in 5 Minuten, bei einer Dichte von $\sim 0,1$ Fahrzeugen/Zelle bis auf 2200 bei $\sim 0,18$ Fahrzeugen/Zelle. Bei einer bestimmten Dichte liegt der Scheitelpunkt der Kurve, in diesem Fall $\sim 20\%$. An dieser Stelle lässt sich der „capacity drop“ beobachten (*roter Pfeil*). Es liegt eine metastabile Hochflussphase vor, in der der Fluss bei einer bestimmten Dichte, hier $\sim 0,2$ Fahrzeuge/Zelle, abrupt abfällt. Zwischen $\sim 0,2$ und $\sim 0,3$ Fahrzeugen/Zelle lässt sich keine einheitliche Tendenz für den Verkehrsfluss beobachten, die Punkte sind gestreut. Ab einer Dichte von $\sim 30\%$ nehmen die Werte linear ab (*grüne Markierung*), bis zu einer Dichte von $\sim 60\%$. Der Fluss sinkt von ~ 1800 Fahrzeugen in 5 Minuten auf ~ 1000 .

Abb. 6: Verlauf von Verkehrsdichte und -fluss nach einer metastabilen Hochflussphase, aus Schadschneider, Andreas: *Physik des Straßenverkehrs*, S.12

Das Diagramm zeigt die Entwicklung des Verkehrsflusses nach einer metastabilen Hochflussphase. Diese ist am Beginn der Messung nur angedeutet. Nach dem Erreichen des Flussmaximums bei ~ 2300 Fahrzeugen/Stunde fällt der Fluss stark ab und schwankt über einen längeren Zeitraum zwischen ~ 1100 und ~ 1800 Fahrzeugen/Stunde. Erst gegen Ende der Messung und nach einem erneuten Verkehrsflussabfall von ~ 1400 auf ~ 1200 Fahrzeugen/Stunde steigt der Fluss stark an. Das deutet darauf hin, dass ein neuer metastabiler Hochflusszustand folgt.

Metastabile Hochflusszustände entstehen zufällig. Nach dem „capacity drop“ stellt sich nicht zwingend eine weitere Hochflussphase ein, trotz abgesunkener Verkehrsdichte.

3.2 Bremslicht-Erweiterung

Im NaSchr-Modell und in der VDR-Erweiterung fahren die Fahrzeuge mit hoher Geschwindigkeit auf ein Stauende zu und stoppen abrupt. Um dies zu verhindern, wird in der Realität vorausschauend

gefahren, das heißt, die Geschwindigkeit der vorausfahrenden Fahrzeuge wird beobachtet und bewertet. Durch Bremsantizipation, erkennen der Bremslichter, wird der Fahrer gewarnt, dass die vorausfahrenden Fahrzeuge bremsen, er fängt ebenfalls an und bremst langsam ab. Damit erreicht er einen höheren Fahrkomfort. Um dies im NaSchr-Modell umzusetzen, ist eine weitere Regel erforderlich:

Zur Vereinfachung erfolgt lediglich eine Interaktion zwischen dem Fahrzeug f_i und den drei vorausfahrenden Autos. Das sind die Fahrzeuge f_{i+1} , f_{i+2} und f_{i+3} . Wenn eines der drei vorausfahrenden Fahrzeuge zum Stehen kommt, reagiert der Fahrer des Fahrzeugs f_i mit der Wahrscheinlichkeit $p_b(f_i)$ und verringert die Geschwindigkeit um 1.

$$\text{Bedingung: } p_b(f_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v(f_{i+1}) * v(f_{i+2}) * v(f_{i+3}) \neq 0 \\ k\% & \text{falls } v(f_{i+1}) * v(f_{i+2}) * v(f_{i+3}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Regel 4: } p_b(f_i) = v(f_i) - 1$$

Das natürliche Bremsverhalten lässt sich mit der Bremslichterweiterung besser simulieren, da mit der Bremswahrscheinlichkeit p_b auch verschiedene Verhaltensweisen simuliert werden können. Es ist möglich, zur Fahrkomforterhaltung langsam zu bremsen oder abrupt vor dem Stau oder eine Mischung aus beiden Bremsverhalten (*graphische Darstellung: siehe Anhang S. 21*).

3.3 Mehrspurverkehr

Das NaSchr-Modell beschäftigt sich ausschließlich mit einspurigen Straßen. Die Entstehung der „Staus aus dem Nichts“ sind jedoch oft auf Autobahnen zu beobachten, wo es meist mehrere Spuren gibt. Auf diesen mehrspurigen Straßen ist es möglich, den eigenen Fahrstreifen zu verlassen, wenn die Situation auf diesem ungünstig ist. Dies ist der *Wechselanreiz* eines Fahrers. Er ist der Meinung, die Situation sei auf dem anderen Fahrstreifen besser und will daher wechseln. Das ist allerdings nur unter Beachtung der eigenen *Sicherheit* und der aller anderen möglich. Ein Spurwechsel muss ohne einen Unfall möglich sein und der nachfolgende Verkehr darf nicht behindert werden. Außerdem gibt es Wechselregeln, die regionale Unterschiede aufweisen:

„Grundsätzlich unterscheidet man zwei Typen von Wechselregeln:

(i): symmetrische Wechselregeln: Hier sind beide Spuren äquivalent. Dies entspricht z.B. der Situation in den USA.

(ii): asymmetrische Wechselregeln: Hier dient die linke Spur nur als Überholspur, wie man es z.B. aus Deutschland kennt. Es gibt daher unterschiedliche Regeln für das Wechseln von links nach rechts und rechts nach links⁹.

Ausscheren:

Nach Christoph Settgest¹⁰, mit eigenen Anpassungen, sehen die Spurwechselregeln wie folgt aus:

Die Regeln beziehen sich auf ein Fahrzeug f_i in der rechten Spur, der Index „0“ steht für den rechten Fahrstreifen, „1“ für den linken. „front“ bezieht sich auf das nächste vorausfahrende Auto, „rück“ auf das erste nachfolgende.

1. Wechselanreiz (1): Die eigene Geschwindigkeit ist größer als die des vorausfahrenden Fahrzeugs auf der eigenen Spur

⁹ aus /2/, S. 116

¹⁰ aus /5/, S. 18

$$v(f_i) > v(f_{0_front})$$

2. Wechsellanreiz (2): Aufgrund eines zu niedrigen Abstands zum vorausfahrenden Fahrzeug müsste man in der nächsten Runde bremsen, der Abstand ist kleiner als die eigene Geschwindigkeit

$$d_{0_front} < v(f_i)$$

3. Wechsellanreiz (3): Der Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug auf der anderen Spur muss größer sein als der zum Fahrzeug auf der eigenen

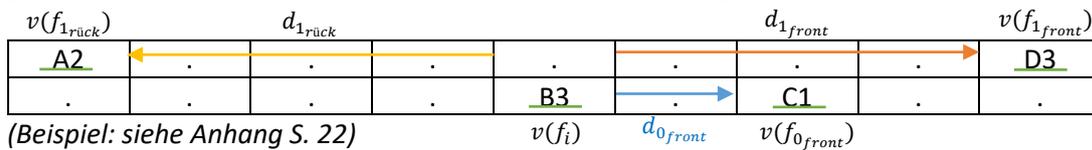
$$d_{0_front} < d_{1_front}$$

4. Wechselsicherheit: Der Abstand zum rückwärtigen Fahrzeug auf der anderen Spur muss größer oder gleich dessen Geschwindigkeit sein, um es bei einem Spurwechsel nicht zu einem Bremsmanöver zu zwingen

$$d_{1_rück} \leq v(f_{1_rück})$$

5. Wechselwahrscheinlichkeit: Wenn alle 4 vorausgegangenen Bedingungen erfüllt sind, erfolgt ein Spurwechsel des Fahrzeugs f_i mit der Wahrscheinlichkeit $p_w(f_i)$

graphische Darstellung: „Spurwechselprüfung“ für Fahrzeug „B“



Einscheren:

Nach dem erfolgreichen Überholvorgang muss wieder eingeschert werden, da in vielen Ländern, wie zum Beispiel Deutschland, ein „Rechtsfahrgebot“ gilt.

1. Wechselsicherheit (1): Der Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug auf der rechten Spur muss groß genug sein, größer oder gleich der eigenen Geschwindigkeit, damit man nicht unnötig bremsen muss

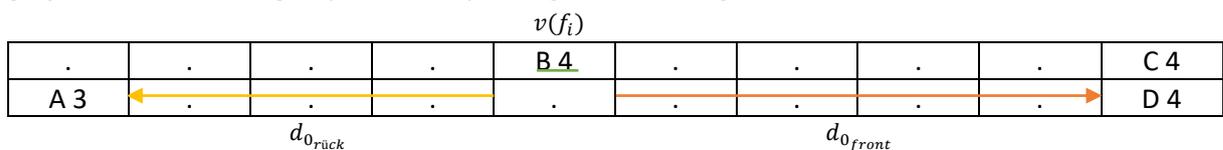
$$d_{0_front} \geq v(f_i)$$

2. Wechselsicherheit (2): Der Abstand zum folgenden Fahrzeug auf der rechten Spur muss groß genug sein, größer oder gleich dessen Geschwindigkeit, um diesen nicht zum Bremsen zu zwingen

$$d_{0_rück} \geq v_{0_rück}$$

3. Wechselwahrscheinlichkeit: Wenn die beiden vorausgegangenen Bedingungen erfüllt sind, erfolgt ein Spurwechsel mit der Wahrscheinlichkeit $p_w = 100\%$.

graphische Darstellung: „Spurwechselprüfung“ für Fahrzeug „B“



3.4 LKW-Erweiterung

Im heutigen Straßenverkehr sind Lastkraftwagen ein gewohnter Anblick. Ihre Anzahl ist auf knapp 3 Millionen Fahrzeuge im Jahr 2017¹¹ gestiegen. Sie sind also ein wichtiger Faktor in der Verkehrsabbildung und sollten somit ebenfalls in die Verkehrssimulation eingebracht werden.

Ein Sattelzug hat eine maximale Länge von 18,75m, in die 7,5m langen Zellen eingeteilt, ist dieser 3 Zellen lang. In der vordersten Zelle steht die Geschwindigkeit, die beiden hinteren belegten Zellen werden mit einem „x“ gekennzeichnet. Auf Grund eines höheren Gewichts beschleunigt ein Lkw langsamer als ein Pkw, um die Beschleunigung auf das NaSchr-Modell anzupassen, kann ein Sattelzug 0,5 Einheiten pro Zeiteinheit schneller werden. Halbe Geschwindigkeitsstufen werden durch ein „+“ hinter der Geschwindigkeitsstufe kenntlich gemacht. Beim Bewegen des Lkw macht das „+“ keinen Unterschied. In der Umsetzung braucht ein Lkw im Modell zwei Zeiteinheiten, um eine Einheit zu beschleunigen. Die gesetzliche Höchstgeschwindigkeit beträgt 80 km/h, also $v_{max} = 3$. Beim Bremsen und Trödeln wird die Geschwindigkeit wie bei Pkw um eine ganze Stufe reduziert (graphische Darstellung: siehe Anhang S. 23) (Beispiel siehe Anhang S. 23).

4. Beschreibung der Stauauflösung mit Hilfe des Nagel-Schreckenberg-Modells

Wenn ein Stau entstanden ist, soll sich dieser schnellstmöglich wieder auflösen, damit einerseits für die Autofahrer keine Zeitverzögerung entsteht, andererseits die erhöhte Unfallgefahr an Stauenden nicht besteht.

Forschungsergebnisse sagen, dass die Stauauflösung durch vermehrtes Trödeln am Stauende behindert wird. Empirische Ergebnisse belegen ebenfalls, dass in einem Stau der Stauausfluss kleiner als der Stau einfluss ist. Das wird im NaSchr-Modell durch die VDR-Erweiterung simuliert.

Aufgrund der Tatsache, dass sich der erhöhte Trödelfaktor am Stauende nicht beseitigen lässt, muss die Stauauflösung auf anderem Weg erreicht werden. Mögliche Methoden sind ein Absenken der maximalen Höchstgeschwindigkeit oder das Öffnen eines weiteren Fahrstreifens von außen. Die Autofahrer selber bremsen frühzeitig vor dem Stauende, um ein abruptes Bremsmanöver zu vermeiden und so den Fahrkomfort möglichst aufrecht zu erhalten. Im Folgenden wird die Effektivität dieser Maßnahmen geprüft.

4.1 Kontrollversuch

Der Kontrollversuch (Diagramm: siehe Anhang S. 23) ist in diesem Fall eine Simulation mit dem NaSchr-Modell mit VDR-Erweiterung und Lkw-Erweiterung, ohne weitere Erweiterungen.

Es entwickelt sich aus zwei stehenden Fahrzeugen, in der Ausgangssituation, ein Stau mit bis zu 7 Fahrzeugen in der 28. Runde. Dieser entsteht nur durch Trödeln, ohne dieses würde sich der Stau in der achten Runde auflösen. Die Trödelwahrscheinlichkeiten mit VDR liegen bei $p_1 = 7\%$ und $p = 3,5\%$. Die besonders hohe Trödelwahrscheinlichkeit p_1 bewirkt, dass beim Verlassen des Staus besonders stark getrödelt wird, was die Stauverlängerung fördert. Durchschnittlich stehen ungefähr 4,18 Fahrzeuge im Stau. Es ist auffallend, dass die Staulänge langsam zunimmt, ab 5 stehenden Fahrzeugen aber recht stabil bleibt, wie in den Runden 30 – 50 zu sehen. Nach 50 Runden stehen 6 Fahrzeuge. Über den Gesamtzeitraum entspricht die durchschnittliche Staugeschwindigkeit $v_{Stau} \cong -0,84$ Zellen/Runde, also 22,75km/h rückwärts. Die durchschnittliche Fahrzeugdichte beträgt $q^{-T} \cong 0,38$ Fahrzeuge/Zelle.

¹¹ siehe /7/

Beim Kontrollversuch lässt sich zusammenfassend beobachten, dass bei den Trödelparametern mit VDR (siehe oben) ein „Stau aus dem Nichts“ über den Simulationszeitraum bestehen bleibt, sich nicht auflöst, sondern an Länge zunimmt.

4.2 Geschwindigkeitsbeschränkung

Das Absenken der zulässigen Höchstgeschwindigkeit vor einem Stau ist eine gängige Praxis, um die Gefahr von Auffahrunfällen zu reduzieren. Ob diese Beschränkung auch zur Stauauflösung dient, soll im Folgenden untersucht werden (*Diagramm: siehe Anhang S. 24*):

In diesem Versuch herrschen die gleichen Ausgangsbedingungen wie im Kontrollversuch, was die Fahrzeugmenge und deren Erscheinen im Simulationsabschnitt betrifft. In der 0. Runde stehen zwei Fahrzeuge, es entsteht ein Stau durch die auffahrenden Autos. Ähnlich dem Kontrollversuch betragen die Trödelwahrscheinlichkeiten $p_1 = 8\%$ und $p = 6\%$. Genauso ist die Geschwindigkeit des Staus mit $v_{Stau} \cong -0,88$ Zellen/Runde, entsprechend $23,83\text{km/h}$ rückwärts, diesem ähnlich. Die durchschnittliche Fahrzeugdichte ist mit $q^{-T} \cong 0,38$ Fahrzeugen/Zelle zum Kontrollversuch identisch.

Der Unterschied ist, dass in der 21. Runde die Geschwindigkeitsbeschränkung ab der 6. Zelle von $v_{max} = 4$ auf $v_{max} = 2$ reduziert wird (*senkrechte rote Linie*). Dies ist um 20 Sekunden verzögert, da der Stau erst erkannt und anschließend reagiert werden muss. Durch die Geschwindigkeitsbeschränkung entsteht eine Lücke im Verkehr, die zur Folge hat, dass sich die Zahl der stehenden Fahrzeuge, von 5 in der 21. Runde auf 3 in der 26. Runde, reduziert. In der 30. Runde wird der Anfang der Geschwindigkeitsabsenkung auf 54km/h um 15 Zellen nach links verschoben, da sich das Stauende dem Anfang dieser Zone nähert und diese so ihr Ziel, das Verlangsamten des auf den Stau zulaufenden Verkehrs, nicht mehr erfüllt. Durch die Verschiebung der Zone bildet sich erneut eine Lücke im Verkehr (*grüne Unterlegung*), welche allerdings – in diesem Fall – keine Auswirkung auf die Staulänge hat.

In der 41. Runde wird ab der 21. Zelle die Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 2$ aufgehoben (*senkrechte grüne Linie*), da der Stauanfang den Punkt passiert hat und die Geschwindigkeitsbeschränkung nicht mehr ihr Ziel (*siehe oben*) erfüllt. Die Höchstgeschwindigkeiten betragen ab da wieder $v_{max} = 4$ für Pkw und $v_{max} = 3$ für Lkw. Diese Veränderung hat keinen Einfluss auf die Stauauflösung, da sie den Stauausfluss nicht vergrößert.

Es ist auffallend, dass durchschnittlich nur 2,98 Fahrzeuge stehen. Das ist damit zu erklären, dass durch die erste Lücke im Verkehr (*siehe oben*) die Staulänge abnimmt und nicht wieder ansteigt, da Stauausfluss und Stauzufluss ähnlich sind. Außerdem hat die Geschwindigkeitsbeschränkung zur Folge, dass im Kolonnenverkehr durch zu starkes Bremsen weitere kleine „Staus aus dem Nichts“ entstehen, zum Beispiel in den Runden 27 und 35 – 36.

Es lässt sich also festhalten, dass eine Absenkung der zulässigen Höchstgeschwindigkeit bei gleicher Verkehrslage – durch eine Lücke im Verkehr – bei kleineren Staus zu einer Auflösung führen kann. Dies hängt von der entstandenen Lückengröße ab, die von der Länge und Differenz der geschwindigkeitsabgesenkten Zone abhängt. Es ist aber ein Problem, dass durch das Abbremsen des Verkehrs weitere Staus hervorgerufen werden können.

➔ Das Absenken der zugelassenen Höchstgeschwindigkeit ist ungeeignet zur Stauauflösung.

4.3 Spurerweiterung

Im Fall eines Staus wird zu dessen Auflösung, wenn möglich, eine weitere Spur freigegeben. An geeigneten Stellen werden dann mit Hilfe von Verkehrstafeln weitere Fahrstreifen freigegeben, oft ist

dies der Standstreifen. Das werde ich jetzt mit Hilfe des NaSchr-Modells untersuchen (*Diagramm: siehe Anhang S. 25*).

Die Ausgangssituation ist die gleiche wie im Kontrollversuch. Die Höchstgeschwindigkeit beträgt $v_{max} = 4$ für Pkw und ist für Lkw $v_{max} = 3$. Die Fahrzeuge betreten – identisch zum Kontrollversuch – den Simulationsabschnitt. Die Trödelwahrscheinlichkeiten betragen unter Verwendung von VDR $p_1 = 7\%$ und $p = 4\%$, die Spurwechselwahrscheinlichkeit $p_w = 78\%$. Die Staubewegung beträgt $v_{Stau} \cong -0,85$ Zellen/Runde, also ungefähr $-22,9\text{km/h}$ und ist ähnlich dem Kontrollversuch.

Bis zur 33. Runde ist die Stauentwicklung identisch zum Kontrollversuch, die Staulänge nimmt zu, mit einem Maximum von 7 Fahrzeugen in der 28. Runde.

Ab der 31. Runde steht ein zweiter Fahrstreifen zur Verfügung (*waagerechte blaue Linie*), welcher ausschließlich zum Überholen durch Pkw freigegeben ist. Ab diesem Punkt gehören zu jeder Runde zwei Zeilen, die Runden werden durch dicke waagerechte Linien abgegrenzt, die Fahrstreifen innerhalb einer Runde durch dünne.

Die Freigabeverzögerung simuliert den Vorgang der Erkennung des Staus durch eine Verkehrsleitzentrale und die Überprüfung durch Kameras, ob die Freigabe einer weiteren Spur erfolgen kann. Das erste Fahrzeug nutzt diesen Fahrstreifen in der 34. Runde (*grüne Markierung*). Dadurch, dass auffahrende Fahrzeuge meist die Überholspur nutzen und so nicht auf das Stauende auffahren, kann sich dieser auflösen. Ab der 45. Runde steht kein Fahrzeug mehr, es ist aber auch noch kein vollständig ungestörter Verkehrsfluss vorhanden, da noch nicht alle Fahrzeuge wieder beschleunigt haben. Das erste Fahrzeug, das den betrachteten Bereich ohne Behinderung passieren kann, ist ein Lkw, der in der 49. Runde den Simulationsabschnitt betritt (*gelbe Markierung*).

Die durchschnittliche Fahrzeugdichte beträgt $0,27$ Fahrzeuge/Zelle, was vom Kontrollversuch abweicht. Dies lässt sich mit der Kapazitätserweiterung der Straße, durch die Inbetriebnahme eines weiteren Fahrstreifens, erklären, wodurch mehr Zellen zur Verfügung stehen. Der Stau besteht auch nur noch aus durchschnittlich $3,3$ Fahrzeugen, erklärbar durch die Stauverkürzung und -auflösung ab der 34. Runde.

Die Öffnung eines weiteren Fahrstreifens ist eine Möglichkeit, um einen Stau aufzulösen, wie die Simulation zeigt. Dadurch, dass Fahrzeuge auf eine andere Spur wechseln können, fahren sie nicht mehr auf den Stau auf und diesem wird der Zufluss entzogen. Durch mehrere Fahrstreifen erhöht sich die Kapazität einer Straße, es passen mehr Fahrzeuge auf einen Abschnitt, es kommt also nicht so schnell zu einem neuen Stau.

→ Eine Spurerweiterung ist zur Stauauflösung geeignet.

4.4 Bremsenerweiterung

Im realen Straßenverkehr wird vor einem Stau schrittweise abgebremst, um einen ausreichenden Bremsweg sicherzustellen und Fahrkomfort zu erhalten, welcher bei Gefahrenbremsungen verloren geht. Ob dies auch ein Faktor ist, der zu Stauauflösung beiträgt, wird im Folgenden untersucht (*siehe Anhang S. 26*):

Es liegt dieselbe Ausgangssituation wie im Kontrollversuch vor, die Trödelwahrscheinlichkeiten sind mit $p_1 = 13\%$ und $p = 5\%$ höher als im Kontrollversuch und die Fahrzeuge betreten den Simulationsabschnitt an denselben Stellen. Des Weiteren bewegt sich der Stau mit durchschnittlich $v_{Stau} \cong -0,8$ Zellen/Runde, also $21,71\text{km/h}$ rückwärts.

Der Unterschied ist, dass in dieser Simulation Fahrzeuge, die auf einen Stau zufahren, mit der Wahrscheinlichkeit $p_b = 24\%$ auf den Stau reagieren und frühzeitig abbremesen (*grüne Markierungen*).

Es fällt auf, dass sich der Stau in der 3. Runde fast auflöst und auch im weiteren Verlauf kürzer ist als im Kontrollversuch. Das hängt damit zusammen, dass durch das Abbremsen das Auffahren auf den Stau verzögert wird. In diesem Zeitraum gilt dann $i_{in} \leq i_{out}$, was dazu führt, dass die Staulänge identisch bleibt oder abnimmt. Hinter dem vorausschauenden Fahrer sammeln sich währenddessen weitere Fahrzeuge, deren Fahrer nicht vorausschauend fahren, was zur Folge hat, dass diese in kurzen Zeitabständen auf den Stauanfang treffen, was, im Zusammenhang mit der hohen Trödelwahrscheinlichkeit am Stauende, zu $j_{in} > j_{out}$ führt.

Durch frühzeitiges Abbremsen kann also ein Stau über längere Zeiträume unverändert lang bleiben oder sogar in der Länge abnehmen. In diesem Fall löst sich der Stau vollständig in der 34. Runde auf, bis zum Simulationsende bleibt der Verkehr aber zähfließend.

Die durchschnittliche Fahrzeugdichte beträgt $q^{-T} \cong 0,32$ Fahrzeuge/Zelle. Die Abweichung von der Kontrollsimulation hängt damit zusammen, dass Fahrzeuge nicht so lange stehen und so das System schneller wieder verlassen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass vorausschauendes Fahren mit frühzeitigem Bremsen vor einem Stau zu dessen Auflösung führen kann. Durch das frühere Bremsen entstehen größere Abstände im Verkehr. Je mehr Fahrer dies machen, desto schneller geht dies, da die Fahrzeuge in größeren Abständen auf das Stauende treffen.

→ Frühzeitiges Bremsen ist daher zur Stauauflösung geeignet.

5. Fazit

Die Situation aus der Einleitung ist realistisch. Es ist bei einer hohen Verkehrsdichte gut möglich, dass durch Trödeln oder zu starkes Bremsen schnell ein Stau entsteht. Diese „Staus aus dem Nichts“ sind ein Produkt von überbelasteten Straßen oder menschlichen Fahrfehlern.

Das lässt sich mit Hilfe des NaSchr-Modells simulieren. Dieses ist in der Lage, Voraussagen zu treffen, die empirischen Messergebnissen sehr nahekommen.

Nach Untersuchung solcher Stausituationen mit Hilfe von Simulationen durch dieses Modell ergibt sich, dass im Kolonnenverkehr ein Abbremsen eines Fahrzeugs eine Kettenreaktion auslöst, was zur Folge hat, dass sich Stauwellen im Verkehr bilden. Diese nehmen schnell an Länge zu, was damit zusammenhängt, dass am Stauausgang besonders stark getrödelt wird. In Folge dessen ist die Menge der auffahrenden Fahrzeuge größer, als die Anzahl der Fahrzeuge, die den Stau verlassen. Der menschliche Faktor, Trödeln, lässt sich jedoch nicht aus dem realen Straßenverkehr entfernen, sodass zur Auflösung dieser Art von Staus am Stauanfang angesetzt werden muss.

Durch Simulationen hat sich ergeben, dass eine Absenkung der Höchstgeschwindigkeit vor einem Stau nicht zu dessen Auflösung geeignet ist. Dagegen wäre es aber möglich, einen Stau durch Öffnen eines weiteren Fahrstreifens aufzulösen. Es ist allerdings in jedem Fall von Seiten der Fahrer möglich, durch frühes Abbremsen „Staus aus dem Nichts“ aufzulösen oder zumindest zu verkürzen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass „Staus aus dem Nichts“ eine einfache Ursache haben, die sich jedoch nur schwer abschalten lässt. Die Auflösung dieser Staus stellt sich als weitaus schwieriger dar, ist aber sowohl von planerischer Seite, als auch von Seiten der Fahrzeugführer, machbar.

6. Literaturverzeichnis

- /1/ Kai Nagel, Michael Schreckenberg: „A cellular automaton model for freeway traffic“, aus „Journal de Physique I“ N°12 (01.01.1992), S. 2221 – 2229; Zugriff am 07.01.2018
- /2/ Andreas Schadschneider: „Physik des Straßenverkehrs“, Version: 23.04.2004; Zugriff am 01.02.2018
- /3/ Andreas Schadschneider: „The Nagel-Schreckenberg model revisited“, aus „The European Physical Journal B“ (1999), S. 573 – 582; Zugriff am 12.02.2018
- /4/ Michael Spahn: “Reisezeiten im Nagel-Schreckenberg-Modell mit *velocity dependent randomization* und weiteren eindimensionalen Verkehrsflussmodellen auf einer offenen Kante“, Berlin, Mai 2002; Zugriff am 12.02.2018
- /5/ Christoph Settgast: „Die mathematische Modellierung der Staubildung – Analysen mit Hilfe des Nagel-Schreckenberg-Modells zu Verkehrsflussoptimierung“, Version: 27.01.2006; Zugriff am 27.12.2017
- /6/ Wikipedia: Nagel-Schreckenberg-Modell – Fundamentaldiagramm <https://de.wikipedia.org/wiki/Nagel-Schreckenberg-Modell>; Zugriff am 04.03.2018
- /7/ <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/6961/umfrage/anzahl-der-lkw-in-deutschland/>; Zugriff am 10.02.2018
- /8/ http://www.woerterbuchnetz.de/cgi-bin/WBNetz/wbgui_py?sigle=Adelung&lemid=DG01676; Zugriff am 21.01.2018
- /9/ <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/lastkraftwagen-lkw.html>; Zugriff am 21.01.2018
- /10/ <http://rollerreiner.org/EU%20Sattel-%20und%20Gliederzug.htm>; Zugriff am 28.01.2018
- /11/ <https://www.kfztech.de/kfztechnik/kraftfahrzeuge.htm>; Zugriff am 21.01.2018
- /12/ <https://www.duden.de/rechtschreibung/Sicherheitsabstand>; Zugriff am 21.01.2018
- /13/ <https://www.kfz-mag.de/sicherheitsabstand-166111>; Zugriff am 21.01.2018
- /14/ <https://www.duden.de/rechtschreibung/Stau>; Zugriff am 21.01.2018
- /15/ <http://www.wortbedeutung.info/Stauende/>; Zugriff am 21.01.2018

7. Anhang

7.1 Variablenübersicht

Variable	Definition	Definitionsbereich
d	Abstand	$d \in N_0$
d_{front}	Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug	$d_{front} \in N_0$
$d_{rück}$	Abstand zum rückwärtigen Fahrzeug	$d_{rück} \in N_0$
$d_{0_{front}}$	Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug auf der rechten Spur	$d_{0_{front}} \in N_0$
$d_{1_{front}}$	Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug auf der linken Spur	$d_{1_{front}} \in N_0$
f	Fahrzeug	$f \in N$
f_{i+1}	erstes Fahrzeug vor dem betrachteten Fahrzeug „i“	
f_{i+2}	zweites Fahrzeug vor dem betrachteten Fahrzeug „i“	
f_{i+3}	drittes Fahrzeug vor dem betrachteten Fahrzeug „i“	
i	„i“	$i \in N_0$
j_{in}	Stauzufluss	$j_{in} \in N_0$
j_{out}	Stauabfluss	$j_{out} \in N_0$
k	„k“	$k \in N$
n	Zelle	$n \in N_0$
n_i	betrachtete Zelle „i“	$n_i \in N_0$
p	Trödelwahrscheinlichkeit	$0 \leq p \leq 1$
$p(v)$	Trödelwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v	$0 \leq p(v) \leq 1$
p_b	Bremswahrscheinlichkeit	$0 \leq p_b \leq 1$
p_w	Spurwechselwahrscheinlichkeit	$0 \leq p_w \leq 1$
q	Verkehrsfluss	$0 \leq q \leq 1$
ρ	Verkehrsdichte	$0 \leq \rho \leq 1$
T	Gesamtzeit \rightarrow Anzahl der Simulationsrunden	$T \in N$
t	Zeiteinheit \rightarrow eine Runde $\hat{=}$ einer Sekunde	$t \in N_0$
v	Geschwindigkeit	$v \in N_0$
$v(f_i)$	Geschwindigkeit des betrachteten Fahrzeugs „i“	$v(f_i) \in N_0$
v_{max}	Höchstgeschwindigkeit	$v_{max} \in N_0$
x	„x“	$x \in N_0$

7.2 Definitionen

Geschwindigkeit: Die Geschwindigkeit ist „die Zeit, in welcher ein Körper einen gewissen bestimmten Raum zurück legt“¹².

Lastkraftwagen (Lkw): Ein Lkw ist ein „Kraftfahrzeug [...], das[s] nach Bauart und Einrichtung nicht zur Beförderung von Personen, sondern zu Beförderung von Ladungen [...] bestimmt ist“¹³. Er wiegt bis zu 40 t und kann in Deutschland eine maximale Länge von 18,75m haben¹⁴.

Personenkraftwagen (Pkw): Pkw „haben mindestens 4 Räder und werden umgangssprachlich Autos [...] genannt. Pkw[] dienen zur Personenbeförderung und zum Transport von Gepäck[,] aber auch von Gütern. Pkw können auch Anhänger ziehen. Laut Personenbeförderungsgesetz sind Pkw

¹² siehe /8/

¹³ siehe /9/

¹⁴ siehe /10/

Kraftfahrzeuge, die nach ihrer Bauart und Ausstattung zur Beförderung von nicht mehr als neun Personen (einschließlich Führer) geeignet und bestimmt sind“¹⁵.

Sicherheitsabstand: Der Sicherheitsabstand ist ein „bestimmter einzuhaltender Abstand, der der Sicherheit dient“¹⁶. In Deutschland beträgt der Sicherheitsabstand nach der Straßenverkehrsordnung innerhalb geschlossener Ortschaften die Strecke, die man in einer Sekunde zurücklegt. Bei einer Geschwindigkeit von 50km/h macht das 15m . Außerhalb geschlossener Ortschaften muss der Abstand „gleich der in 2 Sekunden gefahrenen Strecke“¹⁷ sein oder gleich dem halben Tachowert in Metern, was bei 100km/h 50m ergibt.

Stau: Ein Stau ist eine „Ansammlung von Fahrzeugen in einer langen Reihe durch Behinderung“¹⁸. Es kommt zum „Stillstand des Verkehrs“⁷.

Staubeginn: Der Staubeginn ist die vordere Staugrenze, an der sich der Stau auflöst.

Stauende: Ein Stauende sind „die letzten Fahrzeuge bei einem Stau“¹⁹, der Teil eines Staus, an dem der fließende Verkehr in stockenden oder stehenden Verkehr übergeht.

Verkehrsdichte: Die Verkehrsdichte ist die durchschnittliche Menge der Fahrzeuge im betrachteten System, im Verhältnis zur vorhandenen Zellenzahl im System (*siehe oben*). Sie wird in Fahrzeugen pro Zelle angegeben.

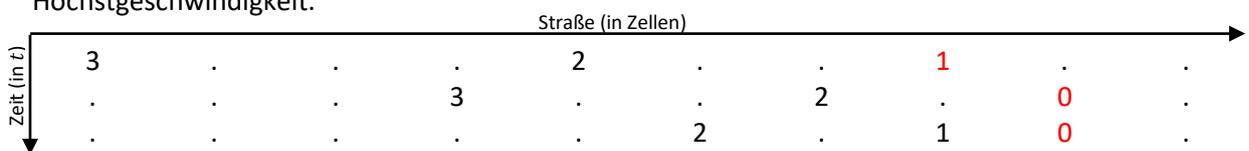
Verkehrsfluss: Der Verkehrsfluss ist in diesem Fall die durchschnittliche Menge der Fahrzeuge, die über einen Zeitraum T eine Zelle n_i passiert. Er wird in Fahrzeugen pro Zeiteinheit angegeben.

Zelle: Eine Zelle n_i ist ein $7,5\text{m}$ langer Abschnitt der simulierten Straße. Sie kann den Zustand „leer“ und den Zustand „besetzt“ annehmen.

7.3 Beweis: Das Nagel-Schreckenberg-Modell ist ein minimales Modell

Das NaSchr-Modell ist ein minimales Modell, das heißt, alle Schritte sind notwendig, um realen Verkehr abzubilden. In jedem Schritt werden für ein Fahrzeug i vier Aktionen ausgeführt, die die Fahrweise des Fahrzeugs bestimmen. Es gibt das Beschleunigen, das Bremsen und das Trödeln, bevor die Ortsänderung durchgeführt wird.

Das **Beschleunigen** ist ein essenzieller Faktor, um realistischen Straßenverkehr darzustellen. Jeder ist bemüht, so schnell wie möglich zu fahren, das bedeutet möglichst dicht an der zugelassenen Höchstgeschwindigkeit.



Der hier dargestellte Straßenabschnitt simuliert eine Landstraße mit $v_{max} = 4$, einer Dichte von $0,3$ Fahrzeugen/Zelle und einer Trödelwahrscheinlichkeit von 11% .

Die Simulation zeigt keinen realistischen Straßenverkehr, da ein Fahrzeug (*rot*) nach dem, durch Trödeln bedingten Anhalten nicht mehr beschleunigen kann. Es ist kein Anfahren mehr möglich. Alle nachfolgenden Fahrzeuge müssen anhalten.

¹⁵ siehe /11/

¹⁶ siehe /12/

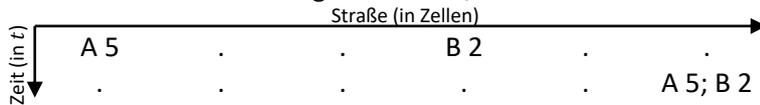
¹⁷ siehe /13/

¹⁸ siehe /14/

¹⁹ siehe /15/

Die Beschleunigungsregel muss also im NaSchr-Modell enthalten sein.

Das **Bremsen** ist wichtig im Verkehr, um Unfälle zu vermeiden.

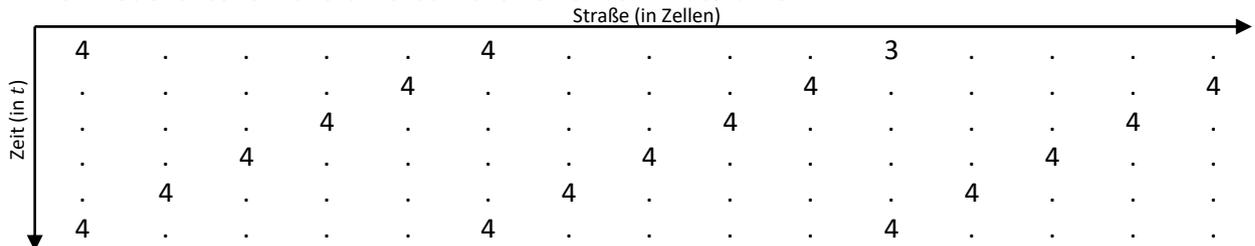


Hier wird eine einspurige Straße mit $v_{max} = 5$ simuliert. Die Dichte beträgt 0,25 Fahrzeuge/Zelle, die Trödelwahrscheinlichkeit liegt bei 50%.

Die Simulation ist unrealistisch, da sich in der ersten Runde zwei Fahrzeuge in einer Zelle befinden, sie würden ineinander stehen.

Die Bremsregel muss auch im NaSchr-Modell ausgeführt werden.

Der **Trödelfaktor** simuliert menschliche Fehler beim Autofahren.



Es wird eine Straße mit einem Fahrstreifen dargestellt, es gilt $v_{max} = 5$, die Trödelwahrscheinlichkeit beträgt 0%.

In der Simulation beschleunigen alle Fahrzeuge auf v_{max} , fahren mit exakt konstanten Abständen, da keiner bremst. Weil nie alle Fahrer perfekt die Höchstgeschwindigkeit fahren und in perfekten Abständen, kann die Simulation keinen realen Straßenverkehr darstellen.

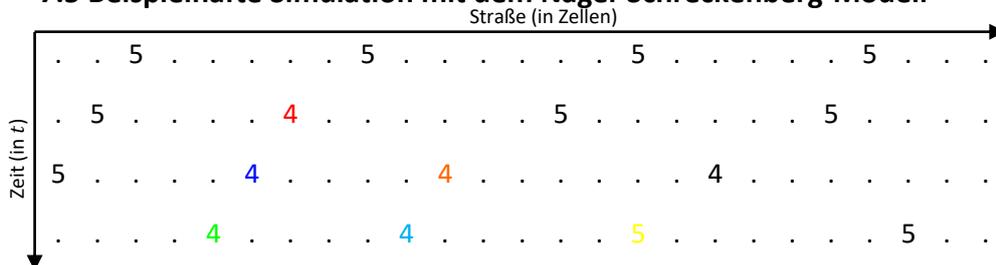
Der Trödelfaktor p ist unerlässlich, um realistischen Verkehr zu simulieren.

Alle Regeln des NaSchr-Modells sind unbedingt zur Verkehrsmodellierung notwendig. Das Modell ist daher minimal.

7.4 Beispielhaftes Nagel-Schreckenberg-Diagramm

Abb. 7: Beispielhafte Darstellung einer Straße mit Hilfe des Nagel-Schreckenberg-Modells, aus Kai Nagel, Michael Schreckenberg *A cellular automaton model for freeway traffic*, S.3

7.5 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell

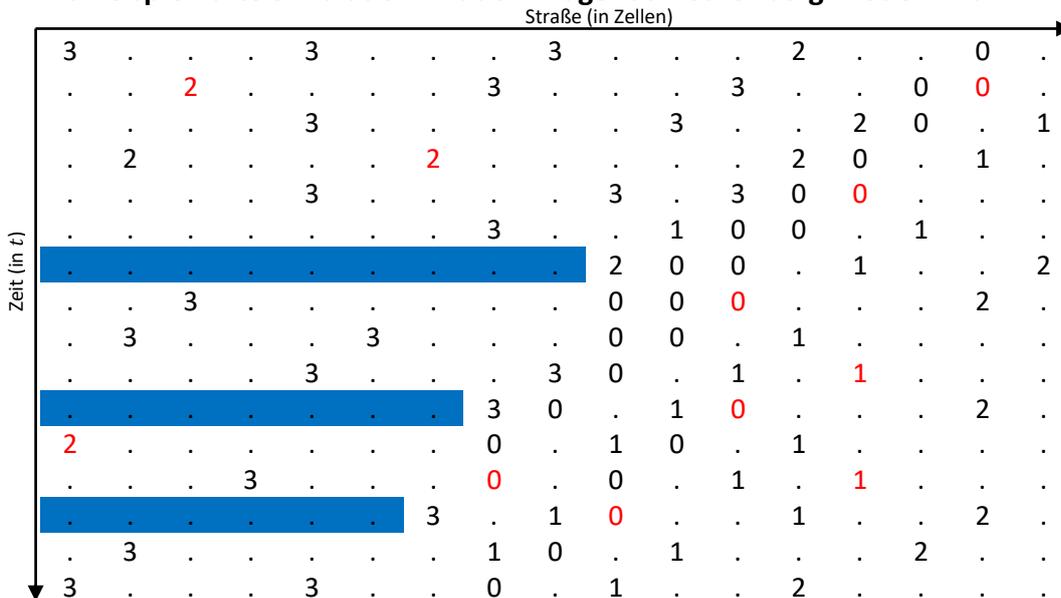


Auf einem Kreis mit 25 Zellen befinden sich 4 Fahrzeuge, die Höchstgeschwindigkeit ist $v_{max} = 5$ und es werden 3 Runden angezeigt. Die Trödelwahrscheinlichkeit beträgt $p = 13\%$.

Ein Fahrzeug (*rot*) trödeln in der ersten Runde, indem es nicht von $v = 4$ auf $v = 5$ beschleunigt. Dadurch ist das folgende Fahrzeug (*dunkelblau*) im nächsten Schritt zum Bremsen gezwungen. Anstatt wieder zu beschleunigen, in der zweiten Runde, trödeln das gleiche Fahrzeug (*orange*) erneut, es behält die Geschwindigkeit $v = 4$, wodurch das folgende Auto (*hellblau*) ebenfalls nicht beschleunigen kann. In der dritten Runde muss ein weiteres, von hinten auffahrendes Fahrzeug (*grün*) auf $v = 4$ bremsen, gleichzeitig beschleunigt das trödelnde Auto (*gelb*) auf $v_{max} = 5$.

Auf Grund des Trödelns eines Fahrzeugs müssen die nachfolgenden Autos bremsen, um nicht aufzufahren. Es entsteht eine Kettenreaktion, von der der Verursacher nichts mitbekommt.

7.6 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR-Erweiterung



Es handelt sich um einen Kreis mit 17 Zellen und einer Geschwindigkeitsbeschränkung auf $v_{max} = 3$. Die Dichte beträgt 0,29 Fahrzeuge/Zelle und die Trödelwahrscheinlichkeit ist nach VDR berechnet und beträgt $p(v) = \begin{cases} 20\% \\ 10\% \end{cases}$. Auf diese Weise wird am Stauende besonders stark getrödeln, was zur Folge hat, dass der Stauausfluss verringert ist und dieser so leichter an Länge zunimmt. In diesem Fall entwickelt sich aus einem stehenden Fahrzeug ein Stau aus bis zu 3 Fahrzeugen, der sich nach 9 Runden auflöst, es hat sich aber in Runde 7 durch Trödeln ein weiterer Stau gebildet. Dieser bleibt bestehen trotz großer Lücken im Verkehr (*blau*).

7.7 Graphische Darstellung der Bremslicht-Erweiterung:



Es wird eine einspurige Straße mit $v_{max} = 4$ dargestellt. Es fahren zwei Fahrzeuge und es stehen zwei mit $v = 0$. Das grüne Fahrzeug reagiert auf das blaue, welches mit der Geschwindigkeit $v = 0$ fährt und bremst mit der Wahrscheinlichkeit $p_b = 50\%$ frühzeitig ab. Es kann den gestauten Bereich ohne anzuhalten durchqueren. Das rote Fahrzeug reagiert nicht auf die stehenden Fahrzeuge und fährt mit $v_{max} = 4$ bis vor das Stauende und stoppt abrupt. Es muss anhalten.

7.8 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell bei Mehrspurverkehr



Ein Fahrzeug (*rot*) fährt mit der Geschwindigkeit $v = 4$ auf der rechten Spur. Vor diesem befindet sich ein langsames Fahrzeug (*blau*) mit der Geschwindigkeit $v = 3$. Die Distanz zwischen den Fahrzeugen beträgt $d = 3$, das rote Fahrzeug müsste also in der nächsten Runde bremsen. Um dem zu entgehen, will das Fahrzeug überholen, also auf die linke Spur wechseln. Es wird daher geprüft, ob das vorausfahrende Fahrzeug auf der Überholspur (*grün*) schneller ist als das auf der rechten Spur. Es ergibt sich $v_{1_{front}} > v_{0_{front}} = 5 > 3$, die Bedingung ist erfüllt. Der Abstand zum grünen Fahrzeug ist größer als der zum blauen $d_{1_{front}} > d_{0_{front}} = 4 > 3$. Die Bedingung ist ebenfalls erfüllt. Der Abstand zum hinteren Fahrzeug auf der linken Spur (*gelb*) ist größer als dessen Geschwindigkeit $d_{1_{rück}} > v_{1_{rück}} = 7 > 5$, der Spurwechsel kann nun erfolgen:



Im Folgenden handelt es sich immer um die gleichen Ausgangssituationen, jeweils mit einer Abweichung, die den Spurwechsel des roten Fahrzeugs verhindert.



Das rote Auto kann die Spur nicht wechseln, da das vorausfahrende grüne Fahrzeug langsamer ist, als blaue $v_{1_{front}} < v_{0_{front}} = 2 < 3$.

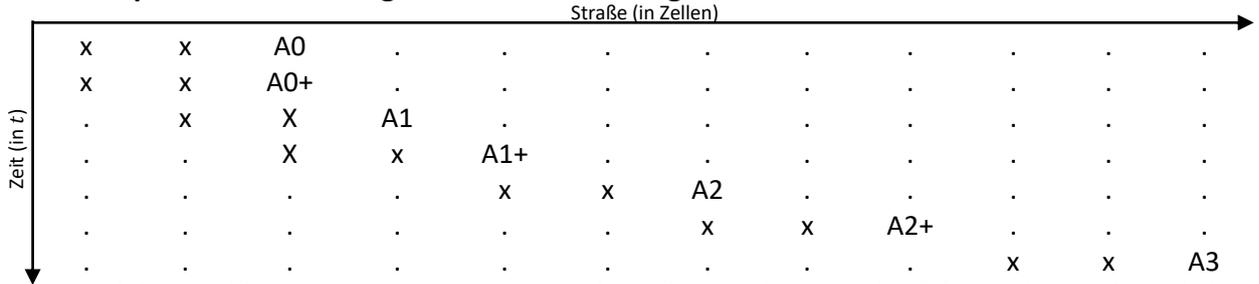


Da der Abstand zu den vorausfahrenden Fahrzeugen, blau und grün, gleich ist $d_{0_{front}} = d_{1_{front}} = 3 = 3$, geht es auf der Überholspur auch nicht schneller und es erfolgt kein Spurwechsel.

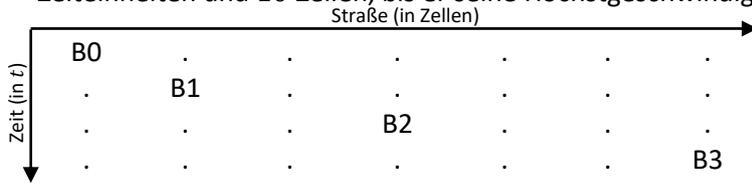


Der Abstand zum folgenden gelben Fahrzeug auf der linken Spur ist kleiner als dessen Geschwindigkeit $d_{1_{rück}} < v_{1_{rück}} = 0 < 5$ und ein Spurwechsel kann nicht erfolgen ohne, dass das gelbe Auto bremsen muss.

7.9 Graphische Darstellung der Lkw-Erweiterung:

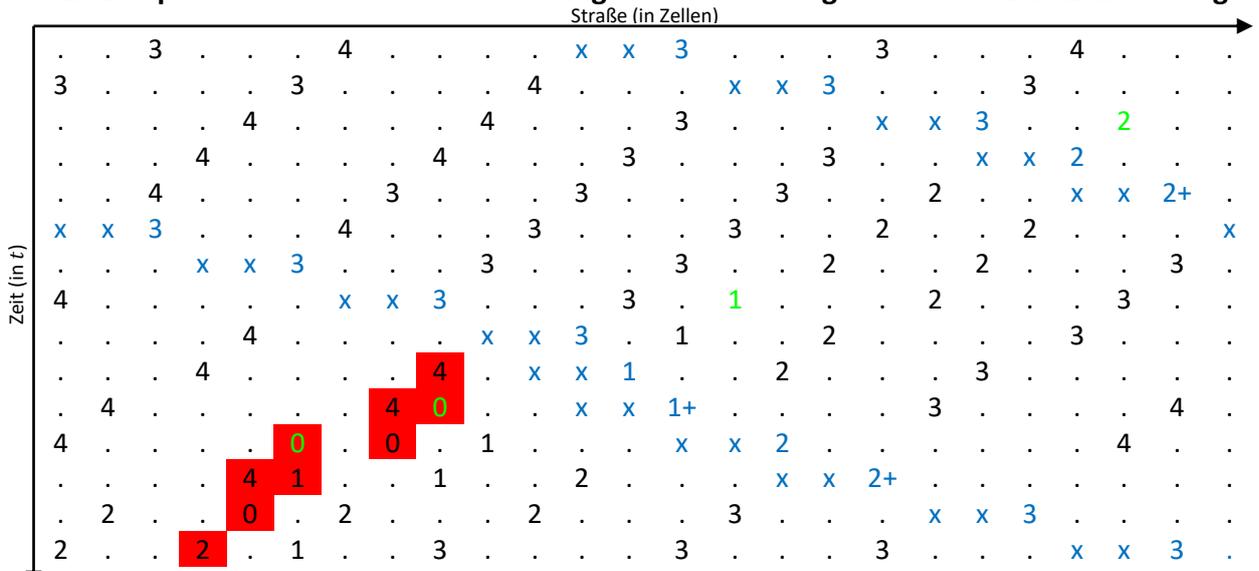


Es wird die Beschleunigung eines Lkw „A“ simuliert, der aus dem Stand auf die Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 3$ beschleunigt. Die verlangsamte Beschleunigung wird so dargestellt, dass in jeder Zeiteinheit um $v + 0,5$ beschleunigt wird. Die halben Geschwindigkeitsstufen sind durch ein „+“ hinter der Stufe dargestellt, das Fahrzeug wird aber nur um die gezeigte Stufe versetzt. Der Lkw benötigt 6 Zeiteinheiten und 10 Zellen, bis er seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hat.



Dagegen die Beschleunigung eines Pkw „B“. Dieser braucht, um die Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 3$ zu erreichen, nur 3 Zeiteinheiten und 6 Zellen.

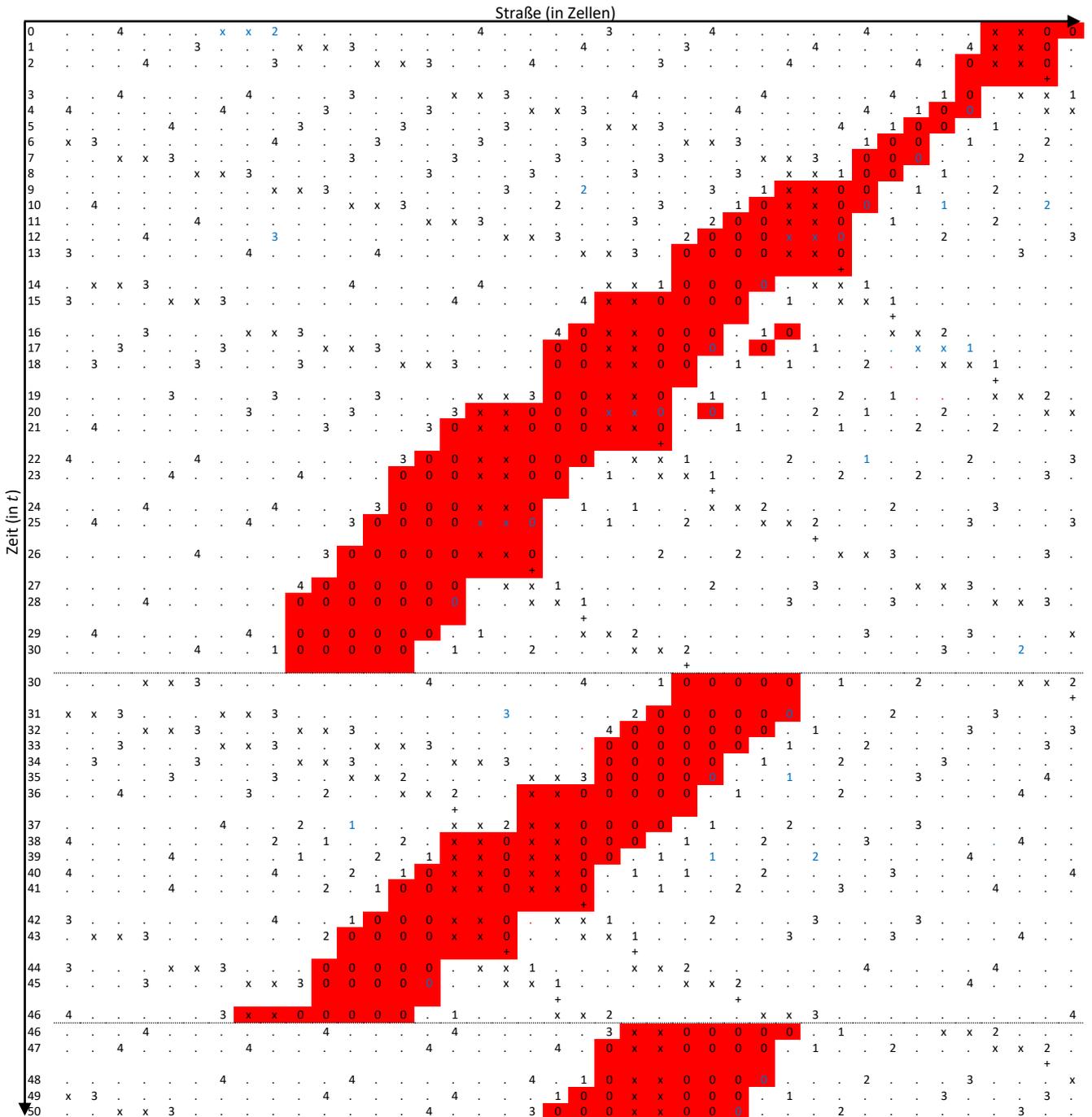
7.10 Beispielhafte Simulation mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell mit Lkw-Erweiterung



Es handelt sich um eine 25 Zellen lange einspurige Straße, mit $v_{max} = 4$. Es sind 15 Zeiteinheiten dargestellt. Bei einer Dichte von $\sim 0,3$ Fahrzeugen/Zelle, zwei Lkw (blau) und einem Trödefaktor $p = 5\%$ bildet sich durch vier trödelnde Fahrzeuge (grün) ab Zeiteinheit 10 ein Stau (rot unterlegt), der sich auch nicht wieder auflöst.

7.11 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Kontrollversuch:

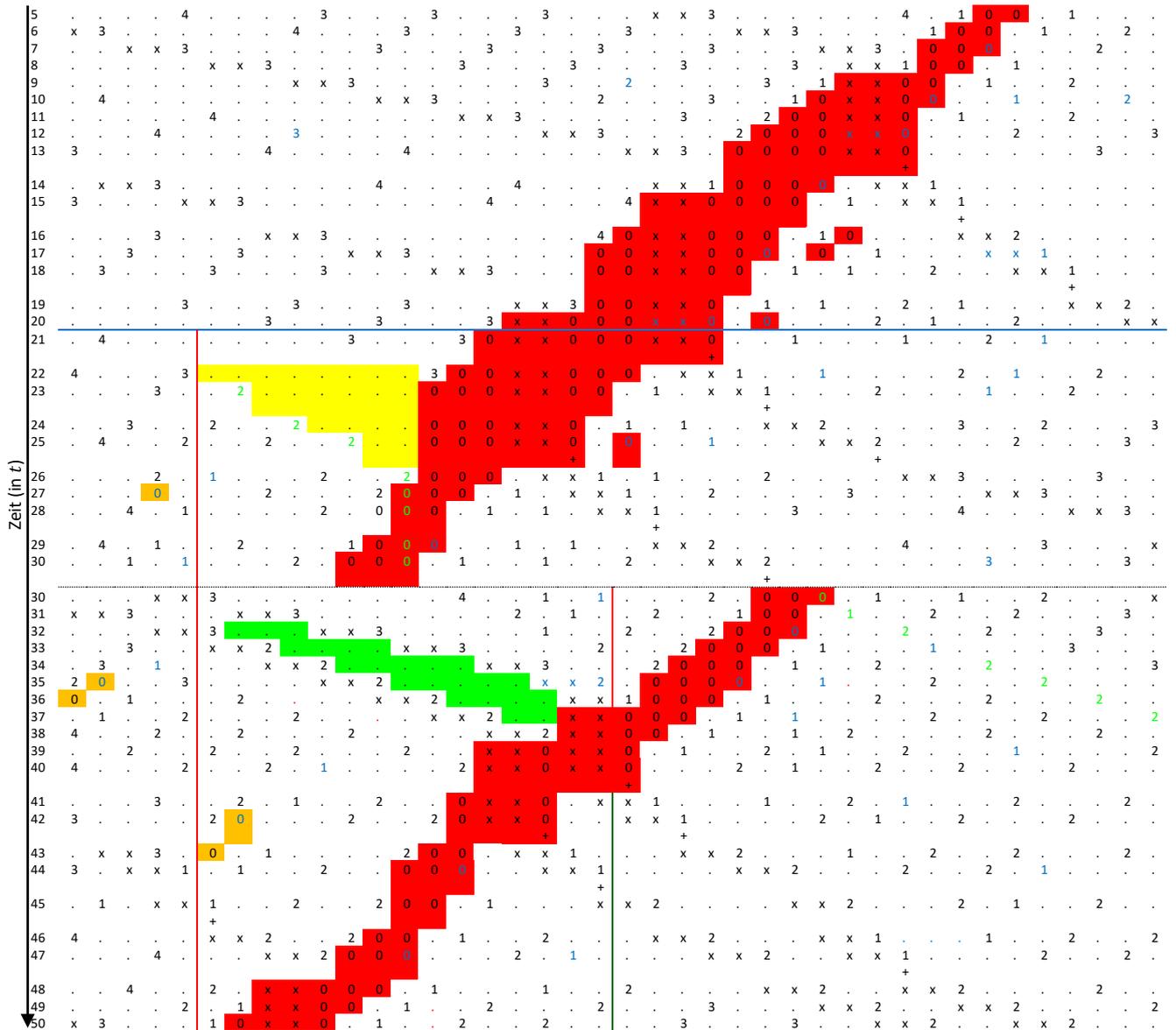
Im Folgenden sieht man das Diagramm für den Kontrollversuch, in dem im ersten Zeitschritt ein Pkw und ein Lkw zum Stehen kommen. Es handelt sich um eine einspurige Straße mit der Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 4$ für Pkw und $v_{max} = 3$ für Lkw. Die Simulation erstreckt sich über 50 Runden. Sobald das Stauende weniger als 10 Zellen vom linken Rand des dargestellten Bereichs entfernt ist, wird die Ansicht um 15 Zellen nach rechts verschoben. Dies wird durch gestrichelte Linien dargestellt. Der gestaute Bereich ist rot unterlegt. Trödelnde Fahrzeuge sind blau dargestellt. Links steht die Rundenzahl und zweimal gezeigte Runden sind durch gestrichelte Linien getrennt.



7.12 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Geschwindigkeitsbeschränkung:

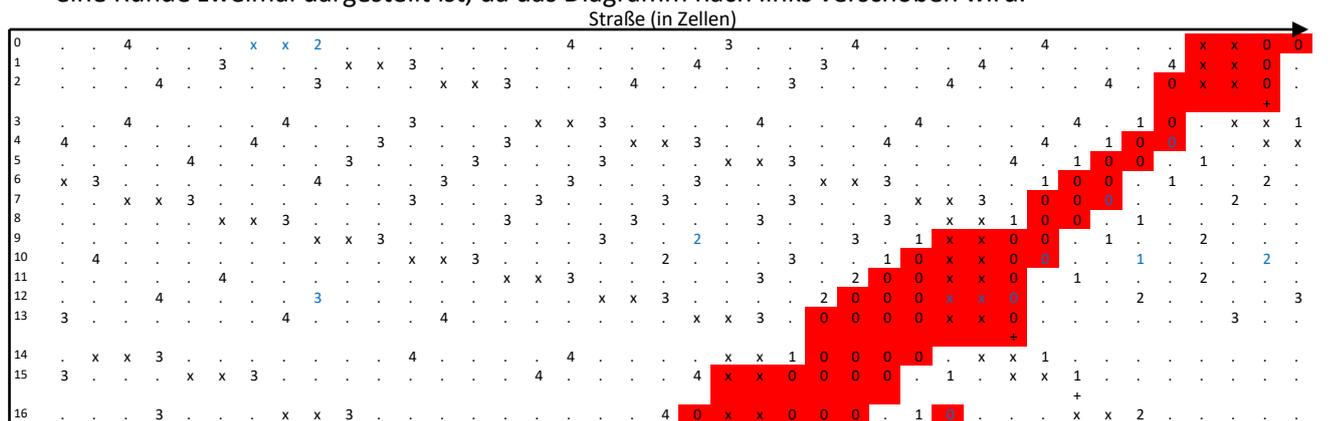
Im folgenden Diagramm wird eine Stauauflösung mit dem NaSchr-Modell beschrieben, ausgelöst durch eine Geschwindigkeitsbeschränkung. Links steht die Rundenzahl, der Stau ist rot unterlegt, kleinere neu entstandene Staus sind orange unterlegt. Trödelnde Fahrzeuge sind blau dargestellt, die eingeführten Geschwindigkeitsbeschränkungen sind durch eine rote, die aufgehobene Geschwindigkeitsbeschränkung durch eine grüne Linie dargestellt. Die waagerechte gestrichelte Linie zeigt, dass ein Zeitschritt zweimal gezeigt wird.

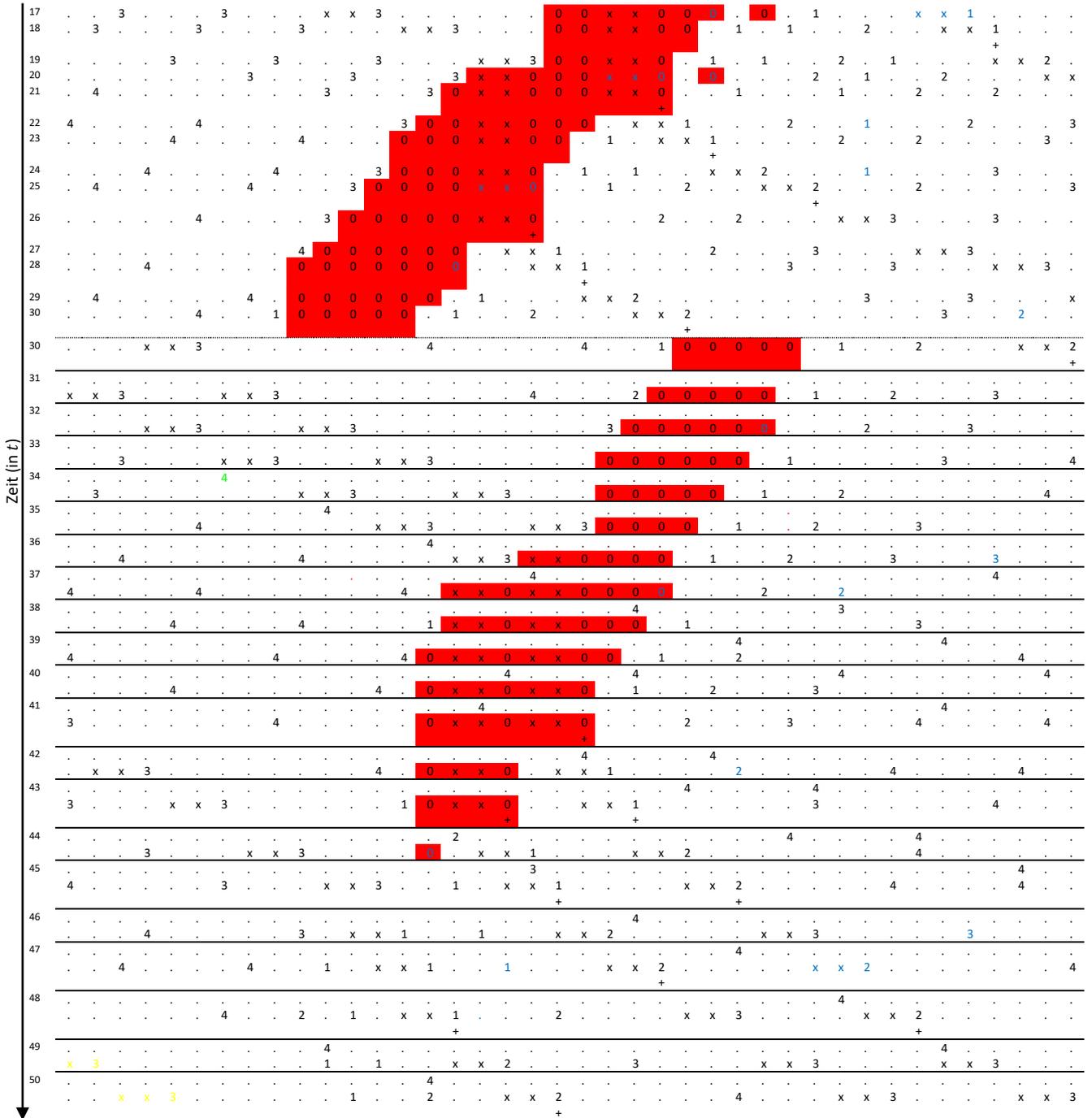




7.13 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Spurerweiterung:

Die Auswirkung einer Spurerweiterung auf einen Stau wird im Folgenden untersucht. Im Diagramm ist der Stau rot unterlegt, trödelnde Fahrzeuge sind blau, das erste Fahrzeug auf der Überholspur grün, dargestellt und die Rundenzahl steht links. Zur besseren Übersicht, sind während des Mehrspurverkehrs die Runden durch waagerechte Linien abgetrennt. Gestrichelte Linien zeigen, dass eine Runde zweimal dargestellt ist, da das Diagramm nach links verschoben wird.





7.14 Stauauflösung mit dem Nagel-Schreckenberg-Modell – Bremslicht-Erweiterung

Im Folgenden wird die vorausschauende Fahrweise einzelner Fahrer und deren Auswirkung auf einen Stau aus dem Nichts untersucht. Diese Fahrzeuge sind grün dargestellt, trödelnde blau und der gestaute Bereich ist rot unterlegt. Ein wiederholter Zeitschritt ist durch eine gestrichelte Linie getrennt, die Rundenzahlen stehen links.



10	.	4	x	x	3	2	.	.	3	.	.	2	.	.	1	x	x	0	.	.	1								
11	.	.	.	4	x	x	3	2	.	2	.	.	2	.	.	1	0	x	x	0	.	.	2	.	.	.								
12	.	.	4	.	.	4	x	x	3	2	.	2	.	.	2	.	.	1	0	.	x	x	1	3								
13	3	.	.	.	3	4	4	2	.	.	0	0	.	.	x	x	1							
14	.	x	x	3	.	.	.	4	4	1	.	.	0	1	0	.	1							
15	3	.	.	.	x	x	3	4	1	.	.	0	1	0	.	1							
16	.	.	.	3	.	.	x	x	3	3	2	.	.	x	x	1	0	.	1	.	.	.	2	.	.	2						
17	.	.	3	.	.	3	.	.	x	x	3	2	.	.	1	.	.	1	.	x	x	0	.	1	.	.	.	2	.	.	2	.	.					
18	.	3	.	.	3	.	.	3	.	.	x	x	3	1	.	.	1	.	.	0	.	x	x	0	.	.	.	2	.	.	2	.	.	3	.	.				
19	.	.	.	3	.	.	3	x	x	3	0	.	0	.	x	x	1	2	.	.	3	.	.	4			
20	3	.	.	2	.	.	2	.	.	x	x	1	0	.	0	.	.	x	x	1	2	.	.	3	.	.	4		
21	.	4	2	.	.	2	.	.	.	2	.	x	x	0	4			
22	4	.	.	.	4	3	.	0	.	x	x	0			
23	.	.	.	4	.	.	4	0	.	0	.	x	x	0			
24	.	.	.	4	.	.	4	0	.	0	.	x	x	0			
25	.	4	.	.	.	4	.	.	2	.	1	.	.	.	0	.	0	.	0	.	x	x	1	x	x	3		
26	.	.	.	4	.	.	2	.	1	.	1	.	.	.	0	.	0	.	1		
27	3	1	.	0	.	0	3		
28	.	.	4	3	0	.	0	.	0	4		
29	.	4	.	.	.	3	0	.	0	.	0	4		
30	.	.	.	4	.	.	3	0	.	0	.	1		
31	.	.	.	4	.	.	3	1	.	0		
32	4	.	.	1	.	0	1		
33	x	3	1	.	0	1	
34	x	x	2	0	.	.	1	.	.	.	2	
35	.	.	.	3	.	.	3	
36	.	.	.	4	.	.	.	3	.	.	2	.	.	.	x	x	1	
37	4	.	.	2	.	1	x	x	1	
38	.	.	4	3	.	1	.	1	.	.	.	x	x	2	
39	4	.	.	1	.	1	x	x	2	
40	.	.	4	3	.	1	
41	4	.	.	1	
42	x	x	3	3	.	2	
43	.	.	.	x	x	3	.	.	.	2	
44	.	.	3	.	.	.	x	x	3	
45	4	.	.	.	3	.	.	.	x	x	3	
46	.	.	.	4	.	.	.	3	
47	.	.	4	.	.	.	3	.	.	3
48	4	.	.	3	
49	x	3	3	.	.	3	
50	.	.	.	x	x	3	3	.	.	.	2	.	1	

8. Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

_____, den _____

Ort

Datum

Unterschrift