

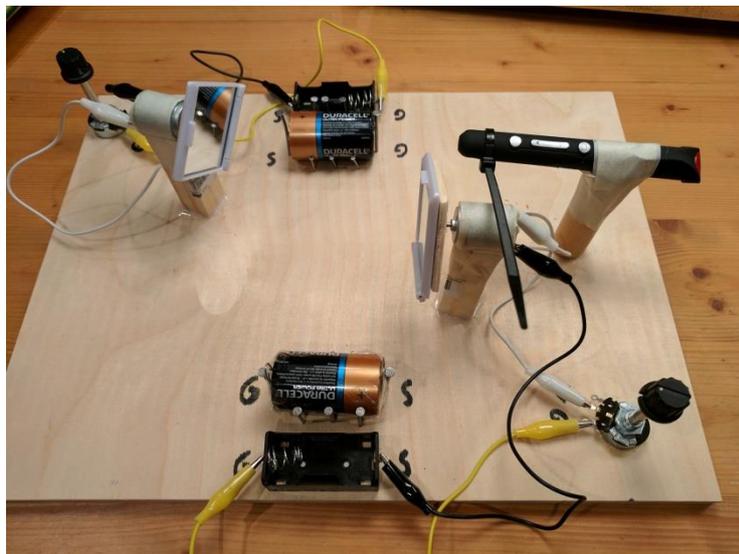
Gymnasium St. Mauritz

Physik LK

Herr Dr. Altmeyer

Schuljahr 2016/2017

Experimentelle Erzeugung von Lissajous- Figuren ganz einfach?



Luca Brilhaus

Wulferdingheide 45

48157 Münster

Abgabedatum: 30.03.2017

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretischer Hintergrund	1
I. Die Überlagerung harmonischer Schwingungen	1
a. Das Weg-Zeit-Gesetz	2
b. Der Schwingungszustand	3
c. Die Phasendifferenz / Phasenverschiebung	3
d. Die Überlagerung frequenzgleicher Schwingungen	3
e. Spezialfälle	5
f. Lissajous-Figuren	6
II. Mathematische Umsetzung der Lissajous-Figuren durch Simulation mit GeoGebra	8
a. Beispielhafte Lissajous-Figuren	8
b. Überprüfung der Figuren anhand der Berührregel	11
3. Experimentelle Erzeugung der Lissajous-Figuren	13
I. Aufbau	13
II. Durchführung	14
III. Beobachtung	14
IV. Auswertung	17
a. Mathematische Untersuchung der Spiegelbewegungen	18
b. Überprüfung der aus der Literatur entnommenen Berührregel	20
4. Schlusswort	24
5. Literaturverzeichnis	25

1. Einleitung

In meiner Facharbeit beschäftige ich mich mit Lissajous-Figuren, welche aus der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen resultieren. Lissajous-Figuren werden besonders häufig für ästhetische Zwecke verwendet, da bei geringfügiger Abweichung der Schwingungsfrequenzen ein 3-D-Eindruck entsteht. Im Rahmen meiner Arbeit habe ich mich in die mathematische Theorie der Lissajous-Figuren eingearbeitet. Um die Theorie experimentell zu überprüfen, habe ich das Exponat aus dem „Exploratorium Teacher Institute“ aus San Francisco zur einfachen Erzeugung von Lissajous-Figuren nachgebaut. Dabei habe ich zu meiner Überraschung festgestellt, dass dieses Experiment gar keine, im strengen Sinne richtigen, Lissajous-Figuren darstellt. Dies werde ich in meiner Arbeit mathematisch nachweisen.

2. Theoretischer Hintergrund

Jules Antoine Lissajous war ein französischer Physiker und wurde durch die nach ihm benannten Lissajous-Figuren bekannt. Lissajous-Figuren entstehen bei der Überlagerung zweier linearer harmonischer Schwingungen.

I. Die Überlagerung harmonischer Schwingungen

Eine Schwingung ist eine sich zeitlich periodisch wiederholende Bewegung. Diese tritt auf, wenn der Gleichgewichtszustand eines Massepunktes gestört wird und dabei Kräfte in Richtung Gleichgewichtslage wirken. Des Weiteren treten bei allen (mechanischen) Schwingungen ähnliche Vorgänge auf.

„Unter einer harmonischen Schwingung versteht man eine Schwingung, bei der die Rückstellkraft der Elongation proportional und stets zur Gleichgewichtslage gerichtet ist, für die also ein lineares Kraftgesetz gilt.“ (Höfling 1973, S. 197)

Ein Massepunkt kann eine oder mehrere harmonische Schwingungen gleichzeitig ausführen. Es handelt sich dabei um eine Zusammensetzung von Bewegungen, die mit dem Superpositionsprinzip / Unabhängigkeitsprinzip erklärt werden können.

„Wenn ein Massepunkt, zwei oder mehrere Schwingungen gleichzeitig ausführt, so erfolgt eine ungestörte Überlagerung der Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräften. Dies bedeutet, dass die genannten Größen vektoriell addiert werden können.“ (Höfling 1973, S.204)

Jedoch entsteht durch die Überlagerung zweier sinusförmiger Schwingungen nicht wieder eine Sinusschwingung. Es können, je nach Frequenzverhältnissen, Amplituden und Phasenunterschieden der Ausgangsschwingungen sehr unterschiedliche Figuren entstehen. Bei der Überlagerung von harmonischen Schwingungen handelt es sich um verwickelte Vorgänge. Kurven, Kreise, Geraden und Ellipsen entstehen, wenn Schwingungen mit der gleichen Frequenz, aber unterschiedlichen Phasen und Amplituden überlagert werden. Sind die Frequenzen ebenfalls verschieden, entstehen komplizierte Lissajous-Kurven (Lissajous-Figuren). Bei der Überlagerung von harmonischen Schwingungen spielt die Phase der Schwingungen eine besonders wichtige Rolle.

a. Das Weg-Zeit-Gesetz

Das **Weg-Zeit-Gesetz** beschreibt den Ablauf der Bewegung eines Punktes. Es stellt somit den zeitlichen Verlauf der Bewegung eines Punktes auf seiner Bahnkurve dar. Das Weg-Zeit-Gesetz der harmonischen

Schwingung ist eine Sinuskurve, weshalb die harmonische Schwingung auch Sinusschwingung genannt wird. Eine harmonische Schwingung, bei der die Zeit $t = 0$ und die Auslenkung $s = 0$ beträgt,

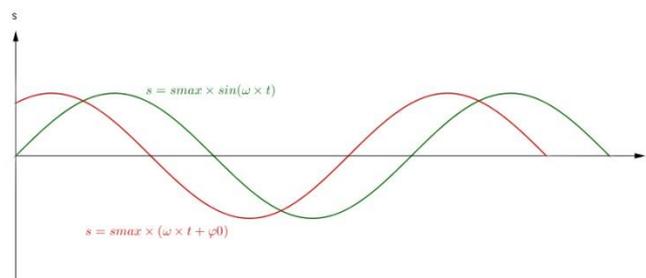


Abbildung 1 Das Weg-Zeit-Diagramm zweier harmonischer Schwingungen

kann durch die Gleichung

$$s = s_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

beschrieben werden. Allerdings sind die Bedingungen Zeit $t = 0$ und Auslenkung $s = 0$ nicht notwendig. Solch eine harmonische Schwingung wird durch die Gleichung:

$$s = s_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

($\omega =$ **Winkelfrequenz / Kreisfrequenz in $\frac{1}{s}$** ; $\varphi =$ **Phasendifferenz / Phasenverschiebung in $^\circ$ Grad oder RAD**)

beschrieben. Bei dieser Schwingung ergibt sich für die Zeit $t = 0$ die Auslenkung $s = s_{\max} \cdot \sin(\varphi_0)$. Diese beiden Schwingungen haben die gleiche Gestalt und unterscheiden sich lediglich dadurch, dass sie gegeneinander verschoben sind. In diesem Falle sagt man, dass sich die im Übrigen gleichen Schwingungen nur durch ihre jeweilige **Phase** oder ihren jeweiligen **Schwingungszustand** unterscheiden.

b. Der Schwingungszustand

Der Schwingungszustand einer Schwingung wird durch die Phase der Schwingung zu einem beliebigen Zeitpunkt t beschrieben. Unter der Phase einer harmonischen Schwingung versteht man Schwingungen der Gleichungen $s = s_{\max} * \sin(\omega * t)$ bzw. $s = s_{\max} * \sin(\omega * t + \varphi)$ mit den Größen $\varphi_1 = \omega * t$ bzw. $\varphi_2 = \omega * t + \varphi_0$.

c. Die Phasendifferenz / Phasenverschiebung

Die Phasendifferenz / Phasenverschiebung ist bei der Überlagerung von harmonischen Schwingungen von besonderem Interesse, da sie direkte Auswirkungen auf die Darstellung der Graphen hat. Die Phasenverschiebung wird durch

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0$$

berechnet. Wenn die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 2\pi, 4\pi, \dots, 2 * n * \pi$

beträgt, fallen die Kurven zusammen und die Schwingungen können nicht

mehr unterschieden werden. Es ist

nur noch eine Schwingung erkennbar. Die Phasenbeziehung zweier Schwingungen wird angegeben durch die beschränkenden Werte $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$.

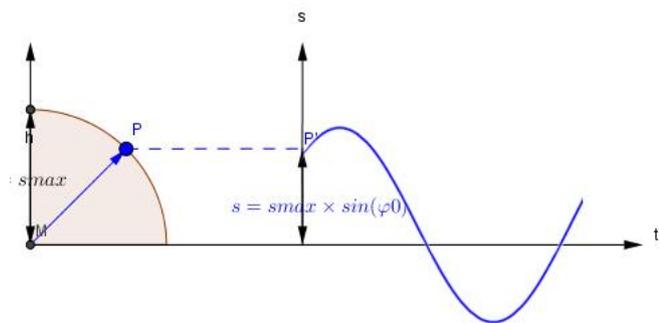


Abbildung 2 Die Zeigerdarstellung einer harmonischen Schwingung

d. Die Überlagerung frequenzgleicher Schwingungen

Frequenzgleiche Schwingungen können durch die Gleichung

$$s_1 = s_{1,\max} * \sin(\omega * t) \text{ und } s_2 = s_{2,\max} * \sin(\omega * t + \varphi_0)$$

beschrieben werden. Durch das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm der beiden Schwingungen kann man die resultierende Schwingung über eine algebraische Addition der Koordinaten erhalten. Auf diese Weise kann man mit einiger Mühe

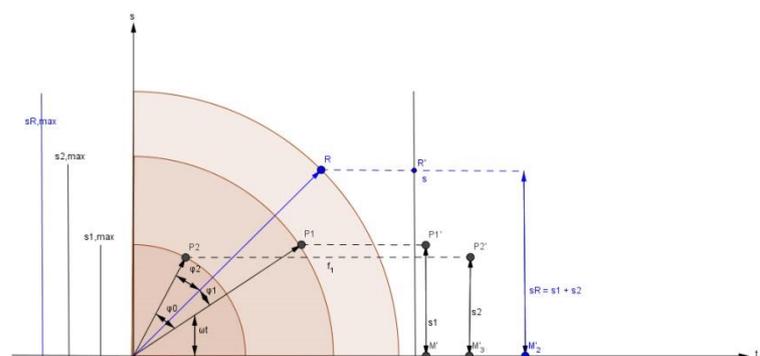


Abbildung 3 Die Überlagerung zweier frequenzgleicher harmonischer Schwingungen mit Hilfe des Zeigerdiagrammes

die Amplitude der resultierenden Schwingung und die Phasenverschiebung gegenüber den Ausgangsschwingungen feststellen. Einfacher ist dies mit dem Zeigerdiagramm (Abbildung 3) möglich.

Man stellt fest, dass für die resultierende Schwingung

$$s_R = s_{1,max} * \sin(\omega * t) + s_{2,max} * \sin(\omega * t + \varphi_0)$$

gilt.

„Mehrere frequenzgleiche harmonische Schwingungen mit beliebiger Amplitude und irgendeiner gegenseitigen Phasenverschiebung ergeben bei der Überlagerung wieder eine harmonische Schwingung der gleichen Frequenz. Die Amplitude und die Phasenverschiebung der resultierenden Schwingung ergeben sich aus dem Zeigerdiagramm durch eine vektorielle Addition der zu den Ausgangsschwingungen gehörigen Zeiger.“ (Höfling 1973, S. 208)

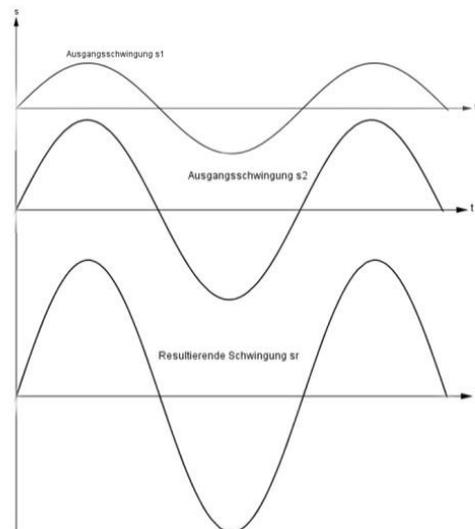


Abbildung 4 Frequenzgleiche harmonische Schwingungen ergeben bei der Überlagerung stets wieder eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz

e. Spezialfälle

Es gibt mehrere Spezialfälle für die resultierende Schwingung:

1. Beträgt die Phasenverschiebung $\varphi_0 = 0$, so ergibt sich für die resultierende Elongation folgende Veränderung:

$$s_{R,\max} = s_{1,\max} + s_{2,\max} \text{ und } \varphi_1 = 0$$

Dies bedeutet, dass die Amplitude der resultierenden Schwingung gleich der Summe der Amplituden der Ausgangsschwingungen ist. Die Phasenverschiebung der resultierenden Schwingung gegenüber der Ausgangsschwingung ist 0 (Abbildung 4).

2. Beträgt die Phasendifferenz $\varphi_0 = 2\pi$, dann ergibt sich:

$$s_{R,\max} = s_{1,\max} - s_{2,\max} \text{ und } \varphi_1 = 0$$

Die Differenz der Amplituden der Ausgangsschwingungen ist gleich der Amplitude der resultierenden Schwingung. Die Phasenverschiebung der resultierenden Schwingung ist gleich 0 bzw. π .

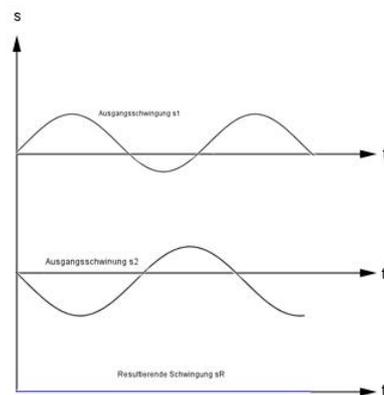


Abbildung 5 Zwei frequenzgleiche harmonische Schwingungen mit der gleichen Amplitude und der Phasendifferenz π löschen einander aus

3. Die Schwingungen heben einander auf, wenn die Ausgangsschwingungen die gleiche Amplitude haben. Eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen führt nicht wieder zu einer harmonischen Schwingung. Durch algebraische Addition der Elongationen der Ausgangsschwingungen kann die Elongation der resultierenden Schwingung für jeden Zeitpunkt berechnet bzw. angegeben werden.

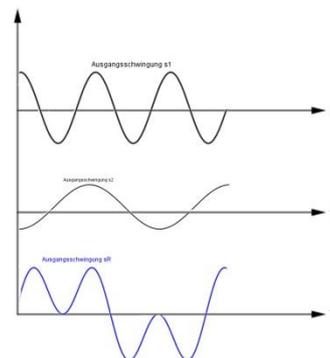


Abbildung 6 Harmonische Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen ergeben bei der Überlagerung keine harmonische Schwingung

f. Lissajous-Figuren

Lissajous-Figuren sind Überlagerungskurven zweier rechtwinklig zueinander stehender Schwingungen. Sie treten auf, wenn die harmonischen Schwingungen verschiedene Frequenzen haben. Sie werden durch die Amplituden und durch die Phasen der harmonischen Schwingungen in ihrem Erscheinungsbild beeinflusst. Haben die Schwingungen ein rationales Verhältnis ihrer Frequenzen, so treten Lissajous-Figuren in Form von geschlossenen Kurven auf. Bei einem irrationalen Verhältnis der Frequenzen überstreicht die Lissajous-Schleife mit der Zeit die gesamte Fläche. Einige der bekanntesten Graphen gehören zu den Lissajous-Figuren, z. B. Strecken, Ellipsen, Kreise und die Parabeln.

Eine Lissajous-Figur wird durch die Parametergleichung

$$x = s_{1,max} * \sin(\omega_1 * t)$$

$$y = s_{2,max} * \sin(\omega_2 * t + \varphi)$$

$$\text{oder } \vec{f}(t) = \vec{s}_{1,max} * \sin(\omega_1 * t) + \vec{s}_{2,max} * \sin(\omega_2 * t + \varphi)$$

(s = Amplitude; φ = Phase; ω = Kreisfrequenz)

beschrieben. Mathematisch handelt es sich um parametrische Schaubilder von Funktionen der Form:

$$t \rightarrow \left(\begin{matrix} s_{1,max} * \sin(\omega_1 * t + \varphi_1) \\ s_{2,max} * \sin(\omega_2 * t + \varphi_2) \end{matrix} \right), t \in [0, \infty]$$

Das Verhalten des physikalischen Systems wird durch die Systemkonstanten $\frac{s_{1,max}}{s_{2,max}}$ (Verhältnis der Amplituden), $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ (Verhältnis der Frequenzen) und φ (Phasenverschiebung) beschreiben.

Typische Lissajous-Grundfiguren erhält man über die vereinfachten Gleichungen $x = \sin(\omega_1 * t)$ und $y = \sin(\omega_2 * t)$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{N}$ sind. Geschlossene Kurven entstehen, da die Sinusfunktionen im Bereich $\{t \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ periodisch sind. Periodisch bedeutet, dass das Frequenzverhältnis $v = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ rational ist, es sich also in einen ganzzahligen Bruch umwandeln lässt. Andernfalls ist die Figur nicht periodisch. Des Weiteren sind die entstehenden Figuren achsensymmetrisch zu den Achsen des Koordinatensystems, da $\sin(\omega_1 * t) = \sin(\omega_1 * (-t))$ und $\sin(\omega_2 * t) = \sin(\omega_2 * (-t))$.

Veränderungen von Parametern:

Phasenverschiebung / Phasendifferenz (φ):

Durch die Veränderung der Phasenverschiebung φ geht die Symmetrie der Graphen verloren. Der Graph dreht sich gegen den Uhrzeigersinn und verändert sein Aussehen. In Abhängigkeit von der Phasenlage kann es sein, dass er sein Grundausssehen beibehält. Lissajous-Figuren benötigen nicht notwendigerweise eine Phasenverschiebung, da diese lediglich Auswirkung auf die Verschiebung des Graphen hat.

Winkelfrequenz / Kreisfrequenz (ω):

Bei einer Veränderung der Winkelfrequenz / Kreisfrequenz ω verändert der komplette Graph in Abhängigkeit von dem Frequenzverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sein Aussehen.

Amplituden (s):

Durch die Veränderung der Amplituden werden die Lissajous-Figuren entsprechend der Amplitude gedehnt.

Sollten die Phasen der einzelnen Schwingungen wie die Frequenzen gleich sein, entsteht ein Kreis. Die Figuren sind nicht mehr geschlossen, wenn mindestens eine Kreisfrequenz / Winkelfrequenz in den Parametergleichungen eine irrationale Zahl ist.

Die Form der Lissajous-Figuren wird entscheidend durch das Verhältnis der Kreisfrequenzen $\omega_1:\omega_2$ bestimmt. Erzeugt man um die Figuren ein Quadrat, welches die max. Elongationen der Graphen in x- und y-Richtung berührt, so erhält man ein sogenanntes umschreibendes Quadrat.

Beispiel: Ein Graph schneidet das umschreibende Quadrat in der **vertikalen 4-mal** und in der **horizontalen 5-mal**. Anhand dieses Beispiels kann man erkennen, dass die Parametergleichungen $x = \sin(4 * t)$ und $y = \sin(5 * t)$ sind. Stellt man den Graphen zu $y = \sin(5 * t)$ im Intervall von **0 bis 2π** dar, erkennt man in seinen Scheitelpunkten die fünf Berührungspunkte. Entsprechendes gilt für $x = \sin(4 * t)$. Daraus lässt sich die Berührregel für Lissajous-Figuren erkennen:

Für ganzzahlige Frequenzen ω_1, ω_2 gilt: „Figuren mit der Darstellung $x = \sin(\omega_1 * t)$ und $y = \sin(\omega_2 * t)$ berühren das umschreibende Quadrat in der Horizontalen ω_2 -mal und in der Vertikalen ω_1 -mal.“ (Köller 2011, Mathematische-Basteleien)

Die Berührregel geht von einer Vereinfachung der Gleichungen $x = \sin(\omega_1 * t)$ und $y = \sin(\omega_2 * t)$ aus. Die Winkelfrequenzen der einzelnen Gleichungen müssen allesamt rational sein, denn bei irrationalen Zahlen als Winkelfrequenz ist die Berührregel nicht anwendbar. Die Phasenverschiebung kann aufgrund der Vereinfachung der Gleichungen von x und y nicht angegeben werden. Man kann diese erhalten, indem man den Graphen von Hand auf dem Blatt oder in der Simulation von GeoGebra dreht.

II. Mathematische Umsetzung der Lissajous-Figuren durch Simulation mit GeoGebra

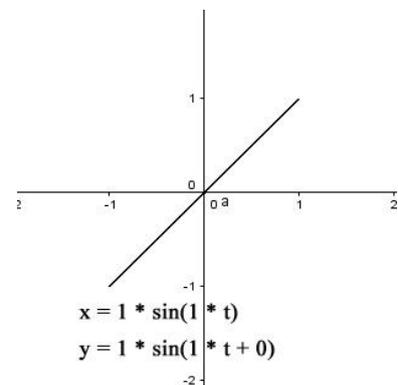
Im Folgenden werden beispielhaft Lissajous-Figuren mit GeoGebra selbst erstellt und anschließend exemplarisch mit der Berührregel ausgewertet.

a. Beispielhafte Lissajous-Figuren

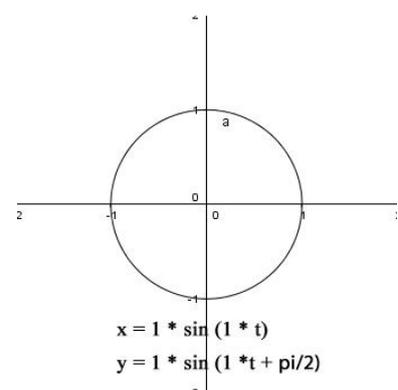
Die bekanntesten Lissajous-Figuren:

Die Amplitude dieser Figuren beträgt 1.

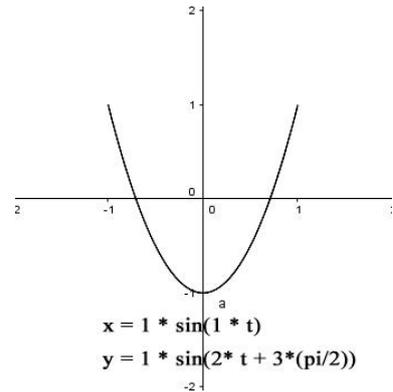
1. Die „**Strecke**“ kann durch die Gleichungen $x = 1 * \sin(1 * t)$ und $y = 1 * \sin(1 * t + 0)$ in GeoGebra erstellt werden. Das Frequenzverhältnis zwischen ω_1 und ω_2 beträgt **1:1**. Durch die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$ wird die ursprüngliche Ellipse zu einer „**Strecke**“ gestaucht.



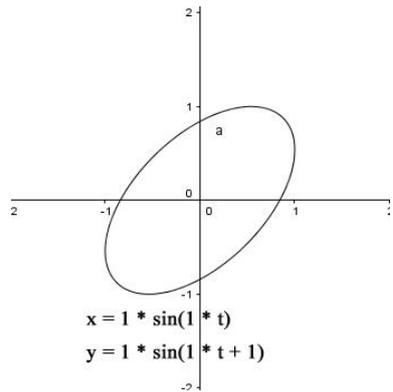
2. Der „**Kreis**“ kann durch die Gleichungen $x = 1 * \sin(1 * t)$ und $y = 1 * \sin(1 * t + \frac{\pi}{2})$ in GeoGebra erstellt werden. Das Frequenzverhältnis von ω_1 und ω_2 beträgt **1:1**. Durch die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird die Ellipse so verschoben, dass ein „**Kreis**“ entsteht. Die Gleichungen des „**Kreises**“ werden nach der Simulation über die Berührregel hergeleitet.



3. Eine „**Parabel**“ entsteht durch die Gleichungen $x = 1 * \sin(1 * t)$ und $y = 1 * \sin(2 * t + 3\frac{\pi}{2})$. Das Frequenzverhältnis von ω_1 und ω_2 beträgt **1:2** und die Phasenverschiebung $\Delta\phi = 3\frac{\pi}{2}$.



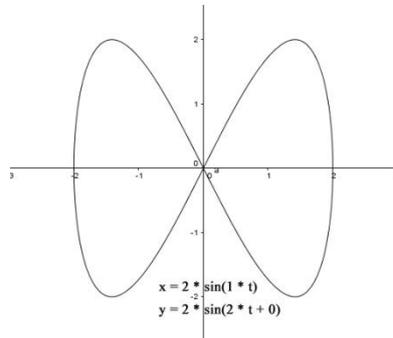
4. Durch die Ausgangsgleichung $x = 1 * \sin(1 * t)$ und $y = 1 * \sin(1 * t + 1)$ erhält man eine „**Ellipse**“. Das Frequenzverhältnis von $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ beträgt **1:1**. Die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ beträgt ebenfalls **1**. Die Phasenverschiebung führt dazu, dass nicht, wie im obigen Beispiel ein Kreis entsteht, sondern eine „**Ellipse**“.



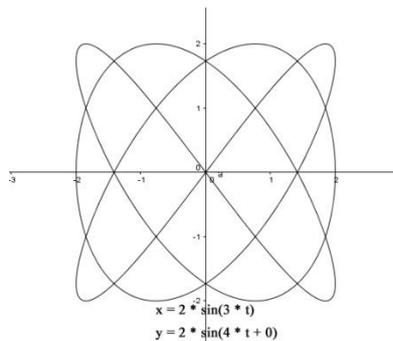
Beispiele für Grundfiguren:

Die Amplitude ist für alle folgenden Figuren auf 2 vergrößert worden.

1. „**Figur 1**“ kann in GeoGebra durch die Gleichungen $x = 2 * \sin(1 * t)$ und $y = 2 * \sin(2 * t + 0)$ erstellt werden. Das Frequenzverhältnis von $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ beträgt **1:2** und die Phasenverschiebung $\Delta\phi = 0$. Durch die Phasenverschiebung 0, ist keine Verschiebung des Graphen entstanden. Die Gleichungen von „**Figur 1**“ werden im zweiten Teil durch die Berührregel hergeleitet.



2. Die Grundfiguren werden immer komplizierter, je größer die einzelnen Winkelfrequenzen werden, solange das Frequenzverhältnis nicht **1:1** beträgt. An dieser Figur wird ebenfalls deutlich, dass auch bei einer Phasenverschiebung von Null Lissajous-Figuren entstehen. „**Figur 2**“ wird durch die Gleichungen $x = 2 * \sin(3 * t)$ und $y = 2 * \sin(4 * t + 0)$ beschrieben. Das Frequenzverhältnis von ω_1 und ω_2 beträgt **3:4**.

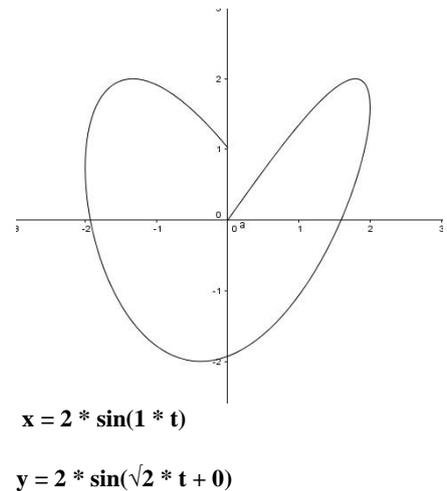


Die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ beträgt **0**, wodurch keine Verschiebung des Graphen entsteht. Die für „**Figur 2**“ notwendigen Gleichungen werden anschließend über die Behrregel hergeleitet.

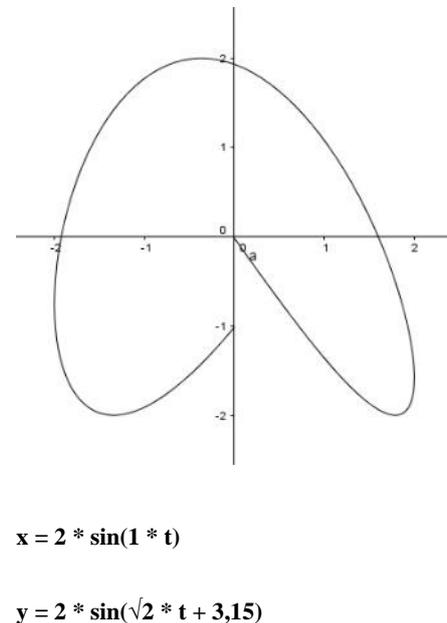
Beispiele für nicht geschlossene Figuren:

Sobald auch nur eine Winkelfrequenz in den Gleichungen **x** und **y** irrational ist, geht jede Symmetrie verloren und die entstehenden Graphen sind nicht mehr geschlossen.

1. Die „**Figur 3**“ wird durch die Gleichungen $x = 2 * \sin(1 * t)$ und $y = 2 * \sin(\sqrt{2} * t + 0)$ beschrieben. Da ω_2 eine irrationale Zahl ist, ist der durch die Gleichungen beschriebene Graph nicht mehr geschlossen und hat keine Symmetrie. Das Frequenzverhältnis der beiden Winkelfrequenzen beträgt $1:\sqrt{2}$ ca. **0,71**. Da keine Phasenverschiebung vorhanden ist, ist der Graph von „**Figur 3**“ nicht verschoben.



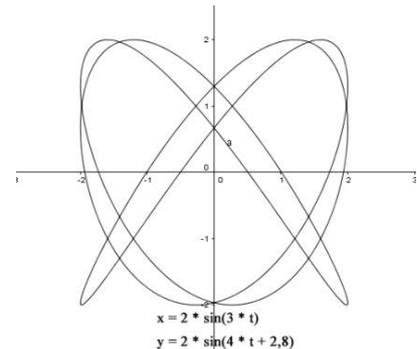
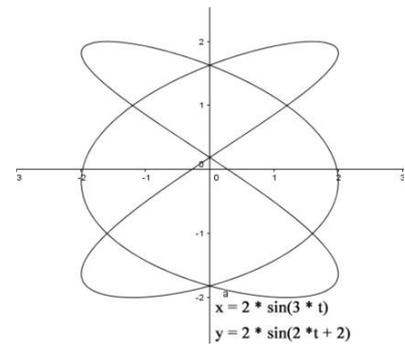
2. Bei „**Figur 4**“ handelt es sich um den gleichen Graphen wie bei „**Figur 3**“. Deshalb wird auf eine detaillierte Beschreibung verzichtet. Der einzige Unterschied zu „**Figur 3**“ ist durch die Phasenverschiebung $\Delta\phi = 3,15$ angegeben. Die veränderte Phasenverschiebung führt in diesem Falle dazu, dass sich der Graph einmal um **180°** dreht.



Beispiele für komplizierte Lissajous-Figuren:

Komplizierte Lissajous-Figuren entstehen, wenn man das Frequenzverhältnis zwischen ω_1 und ω_2 ändert und gleichzeitig eine Phasenverschiebung hinzufügt. Solche Figuren können wie folgt aussehen:

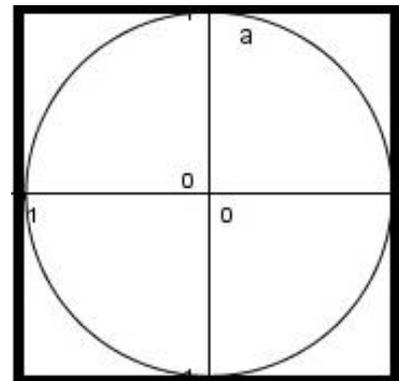
1. „**Figur 5**“ wird über die Gleichungen $x = 2 * \sin(3 * t)$ und $y = 2 * \sin(2 * t + 2)$ beschrieben. Das Frequenzverhältnis beträgt **3:2** und die Phasenverschiebung $\Delta\phi = 2$. Die Gleichungen von „**Figur 5**“ werden im folgenden Teil über die Berührregel bestimmt.
2. „**Figur 6**“ kann durch die Gleichungen $x = 2 * \sin(3 * t)$ und $y = 2 * \sin(4 * t + 2,8)$ angegeben werden. Das Frequenzverhältnis von $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ beträgt **3:4 = 0,75**. Die Phasenverschiebung $\Delta\phi$ beträgt **2,8** und bewirkt eine Verschiebung des Graphen gegen den Uhrzeigersinn. Die für „**Figur 6**“ notwendigen Gleichungen werden im Folgenden über die Berührregel hergeleitet.



b. Überprüfung der Figuren anhand der Berührregel

Das umschreibende Quadrat für den Kreis sieht folgendermaßen aus:

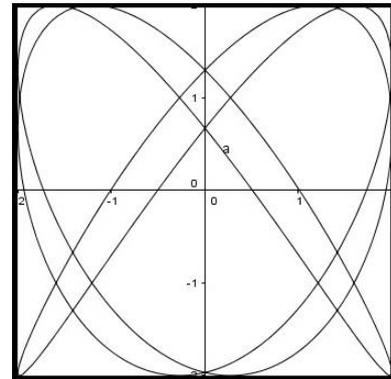
Anhand des umschreibenden Quadrates lässt sich erkennen, dass der Inkreis das Quadrat in der Horizontalen 2-mal und ebenfalls in der Vertikalen 2-mal berührt. Teilt man dieses durch 2 (da wir die Berührungspunkte an jeweils beiden Seiten gezählt haben), kommt man auf folgende Gleichung: $x = \sin(1 * t)$ und $y = \sin(1 * t)$. Wenn wir uns nun die ursprüngliche Gleichung anschauen, stellt man fest, dass ω_1 und ω_2 richtig sind, allerdings kann



keine Aussage über die Phasenverschiebung gemacht werden. Eine Aussage über die Phasenverschiebung zu treffen ist, wie bei der Erläuterung der Berührregel gesagt, nicht möglich, da die Berührregel mit den vereinfachten Gleichungen $x = \sin(\omega_1 * t)$ und $y = \sin(\omega_2 * t)$ arbeitet und die Phasenverschiebung nicht berücksichtigt wird. Trotzdem können wir die Winkelfrequenzen festhalten und diese für richtig erklären, da die Phasenverschiebung lediglich die Verschiebung des Graphen angibt. Wenn man nun die Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ bei GeoGebra in die Gleichung y einfügen würde, stellt man fest, dass die Berührregel Richtiges vorausgesagt hat. Alternativ ist es möglich, den durch die vereinfachten Gleichungen angegebenen Graphen $x = \sin(1 * t)$ und $y = \sin(1 * t)$ per Hand zu drehen und so eine „Phasenverschiebung“ zu erzeugen.

Das umschreibende Quadrat für „Figur 6“:

Aus den Berührungspunkten des umschreibenden Quadrats mit dem Graphen ist erkennbar, dass der Graph in vertikaler Richtung das Quadrat 3-mal pro Seite und in horizontaler Richtung 4-mal pro Seite schneidet. Daraus ergeben sich die Gleichungen: $x = \sin(3 * t)$ und $y = \sin(4 * t)$. Vergleicht man diese mit den obigen Gleichungen, so stellt man fest, dass diese übereinstimmen. Mit Ausnahme der Amplituden und Phasenverschiebung, für die das Gleiche, wie bei „Figur 1“ und „Kreis“ erläutert, gilt.



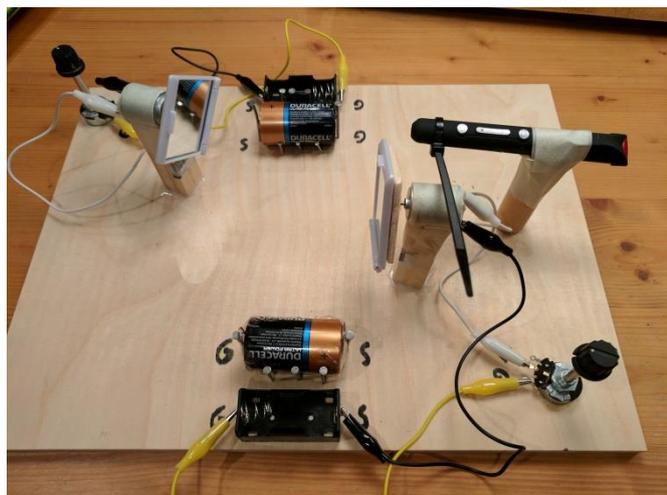
3. Experimentelle Erzeugung der Lissajous-Figuren

I. Aufbau

Materialien:

2 x D-Batterien	16 x Nägel
2 x 1,5-3V Motoren	6 x leitende Kabel
2 x Potentiometer	2 x Knöpfe für die Potentiometer
1 x Laserpointer	1 x Kabelbinder
2 x kleine Spiegel (Optimal 5 x 5cm)	2 x kleine Holzplatten (optimal 5 x 5cm)
2 x Batterie Lötanschlüsse	3 x Holzfüße (gleiche Länge!)
Klebeband	Kleber
Schraubenzieher/Hammer	1 x Holzbrett

Als Erstes werden die Batterien mit den Nägeln locker im Brett fixiert, um sie jederzeit wieder austauschen zu können. Gleichzeitig müssen je zwei Nägel an den Polen der Batterie im Holz befestigt werden, da diese später als Leiter dienen sollen. Im nächsten Schritt müssen die Knöpfe auf den (langen) Stäben des Potentiometers befestigt werden und anschließend auf das Holzbrett geklebt werden (2-mal). In die beiden kleinen Holzplatten sollte ein kleines Loch für den Motor gebohrt werden und im Folgenden



die beiden kleinen Holzplatten sollte ein kleines Loch für den Motor gebohrt werden und im Folgenden

mittig an den Spiegel geklebt werden. Als Nächstes muss der Spiegel vorsichtig an dem Motor geklebt werden. Anschließend muss das Motorengelbe auf einem kleinen Holzfuß mit Klebeband befestigt werden, damit das Austauschen des Motors möglich ist. Wichtig: Beide Holzfüße müssen gleich lang sein! Jetzt werden die Spiegel etwas schräg zueinander auf die Platte geklebt, damit die Reflektion später an die Wand geworfen werden kann. Als Nächstes wird der Laserpointer auf einen Holzfuß (gleiche Länge wie bei den Spiegeln) aufgeklebt. Nun verbindet man einen Motorenkontakt mit der Batterie, einen mit dem Potentiometer und einen Batteriekontakt mit dem Potentiometer (2-mal). Dabei ist es wichtig, dass sich die Spiegel im späteren Versuch in entgegengesetzter Richtung drehen. Nun können noch Batterielötanschlüsse neben die Batterie aufgeklebt werden, damit eine komplette Unterbrechung des Stromkreises möglich ist (Ein-Aus-Schalter). Außerdem ist es möglich, einen Kabelbinder am Laserpointer zu befestigen, damit dieser durchgehend leuchtet.

II. Durchführung

Die Rotationsgeschwindigkeiten der Spiegel werden über die Potentiometer verändert. Dementsprechend verändern sich die Frequenzen der drehenden Spiegel und damit die Kreisfrequenz / Winkelfrequenz ω mit dem Ziel, verschiedene Figuren darzustellen. Die Rotationsgeschwindigkeiten der Spiegel werden mit Hilfe eines (Rotationslasers) gemessen und vermerkt. Über die im Folgenden stehende Formel, wird anschließend das Frequenzverhältnis der Spiegel ausgerechnet. Der Abstand zur Wand spielt dabei keine Rolle, da sich der Abstand zur Wand lediglich auf die End-Größe des Erscheinungsbildes der Figuren auswirkt.

III. Beobachtung

Durch die Veränderung der Frequenzen (Rotationsgeschwindigkeit) der Spiegel entstehen verschiedene Figuren. Die Start Figur ist hierbei ein einfacher Punkt, die sich je nach Veränderung der Frequenzen in komplizierte Figuren umwandelt. ω_1 und ω_2 werden über folgende Formel berechnet:

$$\omega = 2 * \pi * f \left(\text{in } \frac{1}{s} \right)$$

wobei **f** = **Rotationsgeschwindigkeit**

$$\text{Frequenzverhältnis} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Der Spiegel S1 ist jener, auf welchen der Laserstrahl zuerst trifft und von dem aus dieser zum Spiegel S2 reflektiert wird.

Exemplarisch einige durch die selbst gebaute Apparatur erzeugte Figuren:

Figur 1:

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 1: $0 \frac{u}{s}$

$$\omega_1 = 0 \frac{1}{s}$$

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 2: $0 \frac{u}{s}$

$$\omega_2 = 0 \frac{1}{s}$$

Frequenzverhältnis: undefiniert



Figur 2:

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 1: $14,2 \frac{u}{s}$

$$\omega_1 = 89,2 \frac{1}{s}$$

$$\omega_2 = 89,2 \frac{1}{s}$$

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 2: $14,2 \frac{u}{s}$

Frequenzverhältnis: 1 : 1



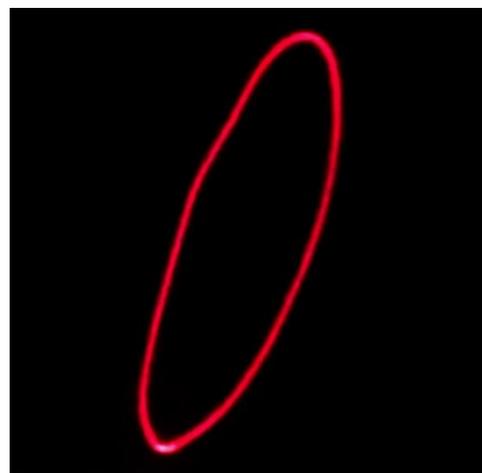
Figur 3:

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 1: $18,5 \frac{u}{s}$

$$\omega_1 = 116,2 \frac{1}{s}$$

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 2: $13,3 \frac{u}{s}$

$$\omega_2 = 83,5 \frac{1}{s}$$



Frequenzverhältnis: 1,4

Figur 4:

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 1: $7,8 \frac{u}{s}$

$$\omega_1 = 49 \frac{1}{s}$$

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 2: $18,5 \frac{u}{s}$

$$\omega_2 = 116,2 \frac{1}{s}$$

Frequenzverhältnis: 0,42

Figur 5:

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 1: $23,8 \frac{u}{s}$

$$\omega_1 = 149,5 \frac{1}{s}$$

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 2: $10,4 \frac{u}{s}$

$$\omega_2 = 65,3 \frac{1}{s}$$

Frequenzverhältnis: 2,3

Figur 6:

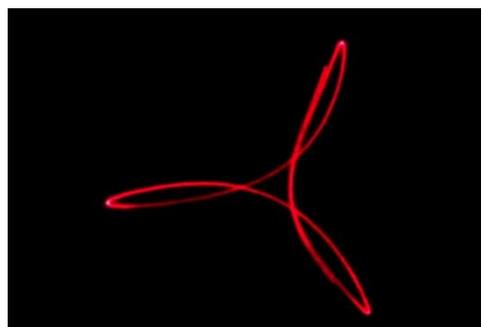
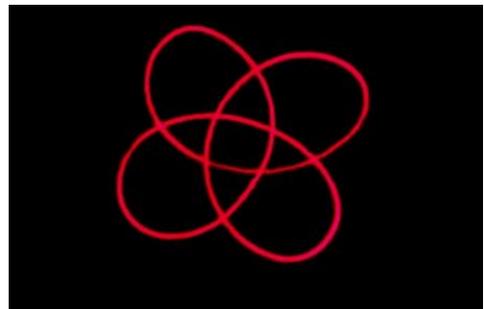
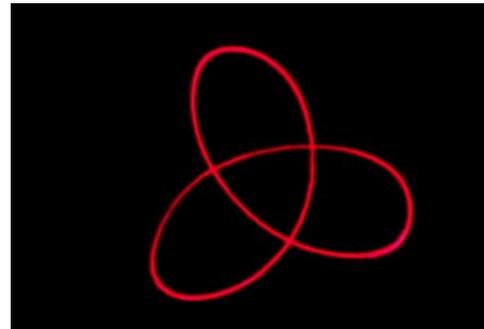
Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 1: $11,3 \frac{u}{s}$

$$\omega_1 = 71 \frac{1}{s}$$

Rotationsgeschwindigkeit Spiegel 2: $24,6 \frac{u}{s}$

$$\omega_2 = 154,6 \frac{1}{s}$$

Frequenzverhältnis: 0,46



IV. Auswertung

Im Folgenden wird die Funktionsweise der Vorrichtung anhand einer Beispielfigur (zu finden in der Quelle Laser Lissajous) erklärt.

Zunächst ist festzuhalten, dass die Erzeugung von Figuren über eine eigene Vorrichtung nach der Anleitung aus San Francisco gelungen ist. Zwei Motoren sind mit je einem Spiegel verbunden, um diese in eine Drehbewegung zu versetzen. Ein Laserstrahl wird auf den Spiegel S_1 gelenkt, sodass dieser nach der Reflektion auf den Spiegel S_2 fällt und von dort aus an die Wand geworfen wird. Sobald sich die Spiegel anfangen zu drehen, entstehen verschiedene Figuren, welche das Resultat der Drehbewegungen der Spiegel sind. Die Funktionsweise der Vorrichtung ist ähnlich wie die eines Spirographen.

Die Abbildung (zu finden in der Quelle Laser Lissajous) ist identisch mit einer der Figuren, die man mit der Vorrichtung erzeugen kann. Um zu verdeutlichen, wie eine solche Figur entsteht, wird diese in der Anleitung vom „Science Museum“ in San Francisco (Quelle: Don Rathjen) als „scrambler ride“ beschrieben. Der scrambler ride ist dabei die Folge einer Überlagerung zweier Kreisbewegungen. Es wird für mehrere Punkte (Punkte 1, 2, etc.; zu finden in der Quelle Laser Lissajous) in Worten erklärt, wie die Figur zustande kommt.

Diese Erklärung ist angelehnt an die Epizykeltheorie der klassischen Planetenbewegung in der Vor-Kepler-Zeit. Diese beschreibt nach der Quelle „Greulich“ die Bewegung der Himmelskörper im geozentrischen System wie folgt: „Hiernach bewegt sich der mittlere Ort eines Planeten mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Kreis, dem Deferenten, um die Erde. Gleichzeitig bewegt sich der Planet im gleichen Sinne auf einem Kreis, dem Epizykel um diesen mittleren Ort. Die resultierende Bewegung sollte

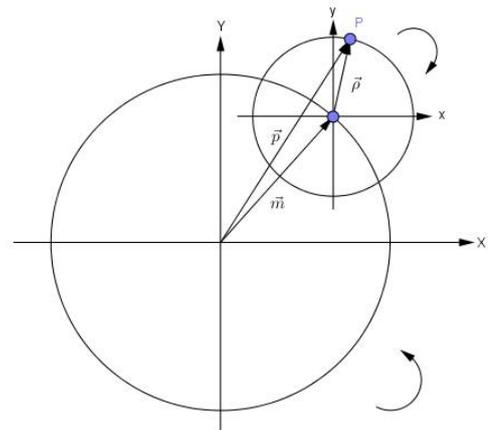


Abbildung 7 Entstehung von Epizykloiden

die Schleifenbahnen der Planeten am Himmel erklären.“ (Greulich 1999, S.258). Gegeben ist also ein (erzeugender) Kreis mit dem Radius R , auf dem ein zweiter Kreis mit dem Radius r in die entgegengesetzte Richtung abläuft. Verfolgt man dabei die Spur eines Punktes P , entstehen Epizykloide (Abbildung 7), welche man auch in der Beobachtung des Experiments wiederfindet.

Vergleicht man abschließend die Beobachtungen und den Aufbau des Geräts mit der Definition von Lissajous-Figuren, muss man streng genommen folgende Schlussfolgerung ziehen: Die Figuren die durch die Vorrichtung erzeugt wurden, sind technisch gesehen keine Lissajous-Figuren, da bei Lissajous-Figuren nach „Höfling“ vorausgesetzt werden muss, dass die beiden harmonischen Schwingungen orthogonal zueinander stehen. Allerdings kann man sie als „Lissajous-ähnliche“ Figuren bezeichnen. Das aufgebaute Experiment verwendet rotierende Spiegel und nicht zwei linear schwingende Oszillatoren. Demzufolge ist es nicht offensichtlich, ob sich die Theorie der Lissajous-Figuren auf das Experiment anwenden lässt. Offen bleibt auch die Frage, ob es sich mathematisch gesehen um Lissajous-Figuren handelt oder nicht.

a. Mathematische Untersuchung der Spiegelbewegungen

Die im obigen Theorieteil angeführten Betrachtungen folgen alle der Quelle „Höfling“. Für die mathematische Beschreibung der Spiegel habe ich eigene Rechnungen entwickelt.

Die Position des Punktes P auf der Bahn lässt sich durch die Addition der Vektoren \vec{m} und $\vec{\rho}$ als Vektor \vec{p} darstellen:

$$\vec{p} = \vec{m} + \vec{\rho},$$

wobei

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \vec{\rho} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Der Vektor \vec{p} lässt sich somit durch folgende

Gleichung beschreiben:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + x \\ Y + y \end{pmatrix}$$

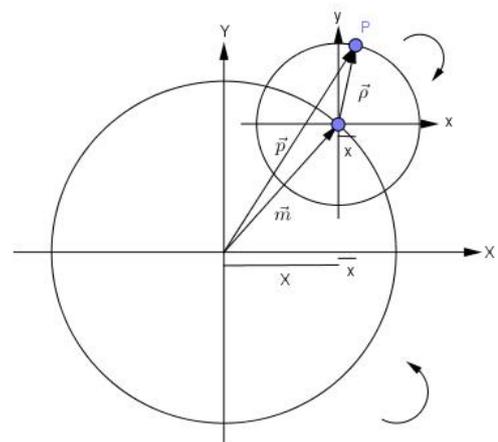


Abbildung 7.1 Entstehung von Epizykloiden

„X“, „x“, „Y“ und „y“ sind jeweils vier Schwingungen, die alle oszillieren. Sie können durch folgende Gleichungen beschrieben werden:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} * \cos(\omega_1),$$

$$Y = R * \sin(\omega_1),$$

$$x = r * \cos(-\omega_2) \text{ und}$$

$$y = r * \sin(-\omega_2)$$

(R = Radius des erzeugenden Kreises, r = Radius des kleinen Kreises (auf ihm ablaufender Kreis), ω = Kreisfrequenz)

Setzt man diese Gleichungen in die Gleichung für den Vektor \vec{p} ein, so erhält man:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} R * \cos(\omega_1) + r * \cos(-\omega_2) \\ R * \sin(\omega_1) + r * \sin(-\omega_2) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A * \sin(\omega_3 * t) \\ B * \sin(\omega_3 * t) \end{pmatrix}$$

(A und B sind die Amplituden zweier Schwingungen)

(Mathematischer Beweis: Scrambler-Figuren sind keine harmonischen Schwingungen!)

Setzt man diese Gleichung in Abhängigkeit zu der Zeit t, so erhält man:

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} R * (\cos(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \cos(-\omega_2 * t)) \\ R * (\sin(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \sin(-\omega_2 * t)) \end{pmatrix}$$

Ausklammern von R:

$$\vec{p}(t) = R * \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \cos(-\omega_2 * t) \\ \sin(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \sin(-\omega_2 * t) \end{pmatrix}$$

Scrambler-Figuren können durch die Gleichung

$$\vec{p}(t) = R * \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \cos(-\omega_2 * t) \\ \sin(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \sin(-\omega_2 * t) \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Diese Gleichung lässt sich wiederum in zwei Gleichungen für x- und y-Richtung aufteilen:

$$x = R * (\cos(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \cos(-\omega_2 * t)) \text{ und}$$

$$y = R * (\sin(\omega_1 * t) + \frac{r}{R} * \sin(-\omega_2 * t)).$$

Verwendet man nun k anstelle von $\frac{r}{R}$ ($k = \frac{r}{R}$), so lässt sich die Gleichung für scrambler-Figuren wie folgt umschreiben:

$$\vec{p}(t) = R * \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 * t) + k * \cos(-\omega_2 * t) \\ \sin(\omega_1 * t) + k * \sin(-\omega_2 * t) \end{pmatrix}$$

da r immer kleiner ist als R gilt:

$$0 \leq k \leq 1$$

(Bei k handelt es sich um das Amplitudenverhältnis von R und r)

Für die Schreibweise in aufgeteilten Gleichungen in x- und y-Richtung gilt selbiges:

$$x = R * (\cos(\omega_1 * t) + k * \cos(-\omega_2 * t)) \text{ und}$$

$$y = R * (\sin(\omega_1 * t) + k * \sin(-\omega_2 * t))$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich erkennen, dass die scrambler-Figuren (die Überlagerung der beiden Kreisbewegungen) keine harmonischen Schwingungen weder in x- noch in y-Richtung aufweisen.

b. Überprüfung der aus der Literatur entnommenen Berührregel

Da mathematisch bewiesen ist, dass die erzeugten „scrambler-Figuren“ keine Lissajous-Figuren sind, stellt sich die Frage, ob sich die aus der Literatur entnommene Berührregel auf die scrambler-Figuren anwenden lässt, oder ob sich eigene Regeln dafür finden lassen. Für das folgende Beispiel wurde auf eine Vereinfachung der Gleichung verzichtet, da eine Vereinfachung keine Auswirkungen auf das Ergebnis hat:

Betrachtet man diese Figur, so muss man nach der Berührregel folgende Schlüsse ziehen: Das umschreibende Quadrat wird in der Vertikalen sowie in der Horizontalen jeweils einmal berührt. Somit müsste die Figur mit folgender Gleichung beschrieben werden können: $x = 1 * \cos(1 * t) + 0,5 * \cos(-1 * t)$ und $y = 1 * \sin(1 * t) + 0,5 * \sin(-1 * t)$. Vergleicht man diese Gleichungen mit den in der Figur angegebenen Gleichungen (Abbildung 8), stellt man fest, dass diese nicht übereinstimmen. Selbst bei einer Vereinfachung der Gleichungen, wie sie in der Berührregel aus der Literatur auch getroffen wurde, stimmen die Gleichungen nicht überein (Abbildung 9).

Nachdem festgestellt wurde, dass die Berührregel aus der Literatur nicht auf scrambler-Figuren anwendbar ist, stellt sich die Frage, ob es eine andere Berührregel für scrambler-Figuren gibt. Durch numerische Experimente mit GeoGebra habe ich solche **Berührregeln** aufstellen können. Dabei gilt ebenfalls eine Vereinfachung, in der die Phasenverschiebung ϕ nicht berücksichtigt wird.

1. Wenn das kleeblattartige Bild eine gerade Anzahl von Kleeblättern aufweist, so gibt es mindestens zwei Berührungspunkte (Abbildung 10).
2. Handelt es sich bei der Anzahl der Kleeblätter im Bild um eine ungerade Zahl, so gibt es genau einen Berührungspunkt an der rechten Vertikalen (Abbildung 11).

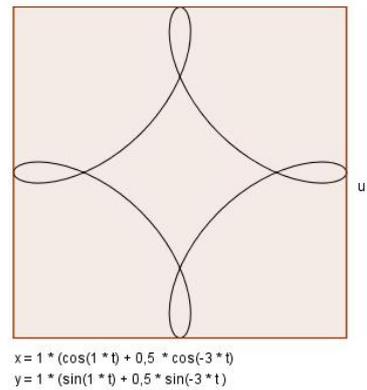


Abbildung 8 Figur mit unveränderten Gleichungen

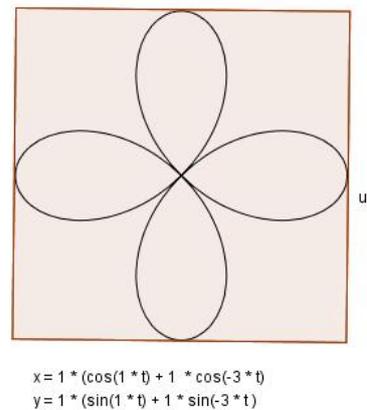


Abbildung 9 Figur mit vereinfachten Gleichungen

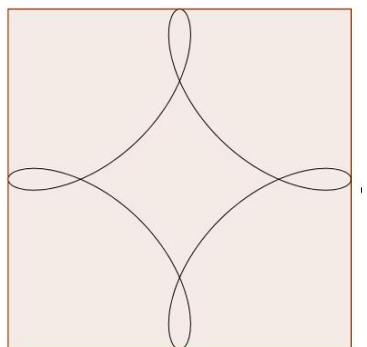


Abbildung 10 Gerade Anzahl von Kleeblättern

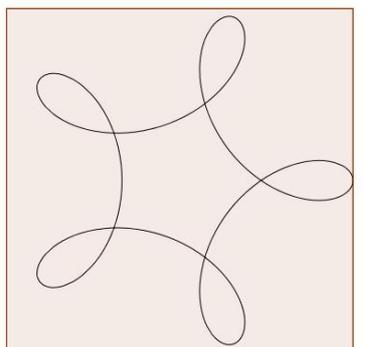
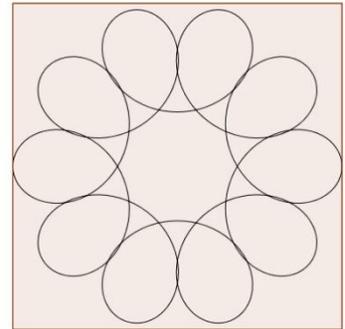


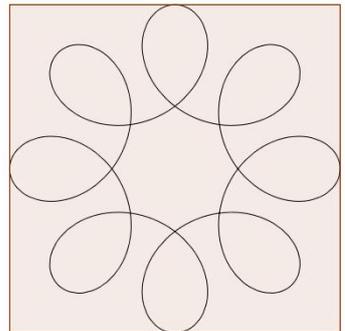
Abbildung 11 Ungerade Anzahl von Kleeblättern

Diese Berührregeln lassen sich noch spezifizieren:

1.1 Handelt es sich bei der Anzahl der Kleeblätter um ein Vielfaches von 2, so gibt es zwei Berührungspunkte, links und rechts an beiden Vertikalen jeweils einen.

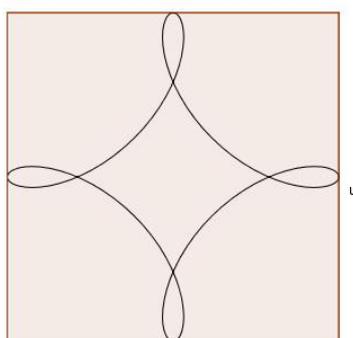


1.2. Handelt es sich bei der Anzahl der Kleeblätter um ein Vielfaches von 4, so gibt es vier Berührungspunkte, an jeder Horizontalen und Vertikalen jeweils einen.

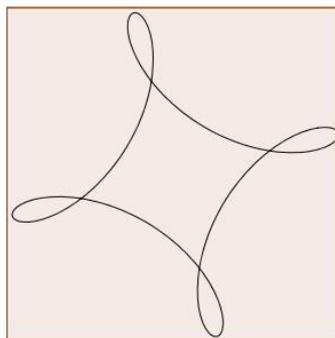


Des Weiteren hat die Phasenverschiebung φ auf scrambler-Figuren, wie auch bei Lissajous-Figuren, lediglich Auswirkungen auf die Verschiebung des Graphen entgegen dem Uhrzeigersinn.

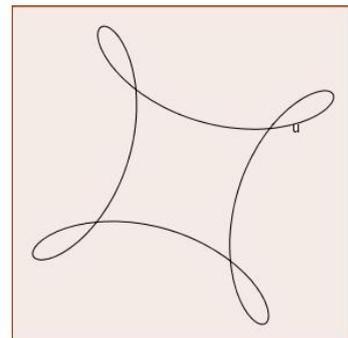
Dies wird exemplarisch am Beispiel des Punktes u verdeutlicht:



$$\begin{aligned} x &= 1 * (\cos(1 * t) + 0,5 * \cos(-3 * t + 0)) \\ y &= 1 * (\sin(1 * t) + 0,5 * \sin(-3 * t + 0)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= 1 * (\cos(1 * t) + 0,5 * \cos(-3 * t + 1)) \\ y &= 1 * (\sin(1 * t) + 0,5 * \sin(-3 * t + 1)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= 1 * (\cos(1 * t) + 0,5 * \cos(-3 * t + 2)) \\ y &= 1 * (\sin(1 * t) + 0,5 * \sin(-3 * t + 2)) \end{aligned}$$

Für die Anzahl der Kleeblätter habe ich ebenfalls Regelmäßigkeiten festgestellt, diese sind in folgenden Regeln zusammengefasst:

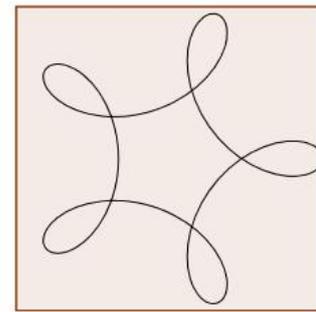
Kleeblattregel:

Für $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = n$:

Die Anzahl aller Kleeblätter der Funktion kann durch die Addition der beiden Winkelfrequenzen $\omega_2 + \omega_1$ angegeben werden. Für diese Regel (und die erweiterte Kleeblattregel) gelten folgende Vereinfachungen: Die Phasenverschiebung φ wird nicht berücksichtigt, da diese lediglich Auswirkungen auf die Verschiebung der Figur entgegen dem Uhrzeigersinn hat. Außerdem spielt das Amplitudenverhältnis k keine Rolle, da diese nur Auswirkungen auf die Größe der Figur hat.

Beispiel: „Figur 1“

„Figur 1“ entsteht durch folgende Kreisfrequenzen: $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 4$. Addiert man nun die beiden Kreisfrequenzen „4 + 1 = 5“, kann man folgende Behauptung aufstellen: „Figur 1“ muss aus fünf Kleeblättern bestehen. Durch einen Vergleich mit „Figur 1“ erkennt man, dass die Behauptung stimmt.



$$\begin{aligned}x &= \cos(1 * t) + 1 * \cos(-4 * t) \\y &= \sin(1 * t) + 1 * \sin(-4 * t)\end{aligned}$$

Abbildung 12 Figur 1

Rückwärts ist diese Regel ebenfalls anwendbar:

Die Figur besteht aus fünf Kleeblättern. Zieht man ein Kleeblatt für ω_1 ab, so bleiben vier Kleeblätter für ω_2 übrig. Somit beträgt die Kreisfrequenz $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 4$. Vergleicht man diese Kreisfrequenzen mit denen der Gleichungen, so stellt man fest, dass diese übereinstimmen.

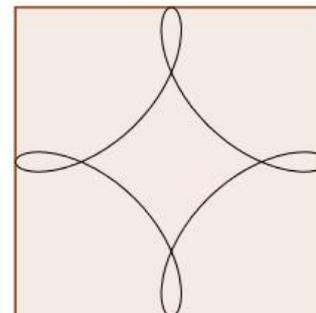
Erweiterte Kleeblattregel:

Für $\omega_1 = n$ und $\omega_2 = n$, wobei $\omega_2 > \omega_1$:

Die Anzahl aller Kleeblätter der Funktion kann durch folgende Gleichung angegeben werden: $\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1 = \text{Anzahl der Kleeblätter}$

Beispiel: „Figur 2“

„Figur 2“ setzt sich aus den Kreisfrequenzen $\omega_1 = 2$ und $\omega_2 = 6$ zusammen. Nach der erweiterten Kleeblattregel kann man die Anzahl der Kleeblätter wie folgt errechnen: $\frac{6}{2} + 1 = 4$. „Figur 2“ besteht infolgedessen aus vier Kleeblättern. Überprüft man diese Aussage mit der Figur, so stellt man wieder fest, dass diese übereinstimmen.



$$\begin{aligned}x &= \cos(2 * t) + 1 * \cos(-6 * t) \\y &= \sin(2 * t) + 1 * \sin(-6 * t)\end{aligned}$$

Abbildung 13 Figur 2

Zusammenfassend kann ich sagen, dass die in der selbst gebauten Vorrichtung erzeugten Figuren keine Lissajous-Figuren sind, da sie nicht das Ergebnis der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen sind. Die in der selbst gebauten Vorrichtung erzeugten Figuren sind das Resultat von zwei aufeinander abrollenden Kreisen, da sie die Summe zweier Winkelfunktionen sind. Mathematisch konnte bewiesen werden, dass es sich nicht um Lissajous-Figuren, wie in der Fachliteratur beschrieben, handelt. Dennoch bleiben die

scrambler-Figuren periodische Vorgänge, da sich der Vorgang zeitlich regelmäßig wiederholt. Vergleicht man die erweiterte Berührregel sowie die Kleeblattregel und die erweiterte Kleeblattregel mit dem Experiment, so ist ebenfalls festzuhalten, dass die Regeln mit den Beobachtungen aus dem Experiment übereinstimmen.

5. Schlusswort

Rückblickend habe ich die in der Einleitung genannten Untersuchungsaspekte chronologisch und detailliert behandelt. Die ursprüngliche Zielrichtung der Arbeit war die mathematische Untersuchung von Lissajous-Figuren mit einem selbst gebauten Experiment. Der aus San Francisco kommende Bauvorschlag stellte sich als ungeeignet für die Realisierung klassischer Lissajous-Figuren heraus, was ich in dieser Arbeit mathematisch nachgewiesen habe. Er produziert sogenannte „scrambler-Figuren“ (Epizykel-Figuren). Außerdem habe ich eine eigene mathematische Formulierung für scrambler-Figuren erstellt. Des Weiteren habe ich eine GeoGebra-Simulation programmiert und sie erfolgreich mit den Figuren aus dem Experiment verglichen. Mit Hilfe numerischer Experimente habe ich die in der Literatur gefundene Berührregel von Lissajous-Figuren für scrambler-Figuren modifizieren können und eine eigene Regel für die Anzahl der Kleeblätter formuliert (Kleeblattregel, erweiterte Kleeblattregel).

5. Literaturverzeichnis

Oskar, Höfling: Physik. Band II Teil 1. Mechanik - Wärme, Bonn 1973¹⁰, Ferd. Dümmers Verlag.

Walter Greulich: Lexikon der Physik: in sechs Bänden, Band 2. Heidelberg 1999, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg.

GeoGebra: <https://www.geogebra.org/>

Jürgen Köller (2011): Lissajous-Figur,

<http://www.mathematische-basteleien.de/lissajous.html>, abgerufen am 22.03.2017 um 18:30 Uhr.

Jürgen Köller (2011), Epizykloide,

<http://www.mathematische-basteleien.de/epizykloide.htm>, abgerufen am 22.03.2017 um 19:00 Uhr.

Don Rathjen (2015): Laser Lissajous,

http://www.exo.net/~donr/activities/Laser_Lissajous.pdf, abgerufen am 10.02.2017 um 10:00 Uhr.

Sasserlone: Werner Heisenberg,

<http://www.sasserlone.de/autor/90/werner.heisenberg/>, abgerufen am 24.03.2017 um 21:20 Uhr.

Wikipedia: Lissajous-Figuren,

<https://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur>, abgerufen am 29.03.2017 um 20:00 Uhr.

Zitate zum Nachdenken: Albert Einsteins Zitate,

<http://zitatezumnachdenken.com/albert-einstein>, abgerufen am 24.03.2017 um 21:00 Uhr.

Zitate und Sprüche zur Physik:

<http://www.oberstufenphysik.de/physiksprueche.html>, abgerufen am 24.03.2017 um 21:15 Uhr.