

# Auszüge aus der Graphentheorie und ihre Berührungspunkte mit dem modernen Leben

Vorwissenschaftliche Arbeit

Hanna Pillichshammer

Klasse 8C

Betreuerin: Mag. Magdalena Schallmainer

Bundesgymnasium Vöcklabruck

Schloßstraße 31a

4840 Vöcklabruck

Abgabedatum:

03. März 2023

## Abstract

Graph theory is a relatively young subdiscipline of modern mathematics. Its foundations go back to the famous mathematician Leonhard Euler in the 18th century. In this work the early beginnings, namely the problem of seven bridges of Königsberg, will be explained. Then the basic mathematical definitions will be presented and some elementary results about graphs will be provided. Among them is the very useful Euler-formula, which connects the number of edges, vertices and faces of planar graphs. The main part of this paper is devoted to the problem of colourings of planar graphs. The six colour theorem and the five colour theorem will be proved. Furthermore, also the four colour theorem will be discussed. Lastly, this paper explores some practical problems that can be solved with methods from graph theory.

# Inhaltsverzeichnis

Abstract.....	2
Inhaltsverzeichnis.....	3
1. Einleitung .....	4
2. Anfänge der Graphentheorie: Das Königsberger Brückenproblem .....	5
3. Definition und Eigenschaften eines Graphen .....	7
3.1 Definition.....	7
3.2 Knotengrade.....	8
3.3 Wichtige Typen von Graphen .....	9
3.3.1 Der vollständige Graph .....	9
3.3.2 Weg und Kreis .....	10
3.3.3 Baum .....	11
4. Planare Graphen.....	12
4.1 Die Eulersche Polyederformel .....	12
4.2 Weitere Anwendungen der Eulerschen Polyederformel .....	14
5. Der Vier-Farben-Satz .....	17
5.1 Problemstellung und Geschichte.....	17
5.2 Zulässige Färbung.....	19
5.3 Die chromatische Zahl .....	19
5.4 Der Greedy-Algorithmus.....	21
5.5 Der Sechs-Farben-Satz.....	22
5.6 Der Fünf-Farben-Satz.....	23
5.7 Der Vier-Farben-Satz .....	26
6. Beispiele der Graphentheorie aus dem Alltag .....	28
6.1 Frequenzplanung in Funknetzen .....	28
6.2 Anwendung in der Verkehrsplanung .....	30
6.3 Anwendung in der Chemie .....	32
6.4 Weitere Anwendungsgebiete .....	33
7. Fazit .....	34
Abbildungsverzeichnis 1.....	35
Abbildungsverzeichnis 2.....	35
Literaturverzeichnis.....	36

# 1. Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Graphentheorie, welche ein Teilgebiet der diskreten Mathematik ist. Die Ziele sind zunächst eine kurze Abhandlung der Entstehung dieser relativ jungen mathematischen Teildisziplin, die Bereitstellung der wichtigsten Definitionen, Begriffe und elementaren Zusammenhänge und die genauere Analyse einer konkreten Fragestellung, dem Vier-Farben-Problem. Ein weiteres Anliegen ist es, die Relevanz der Graphentheorie für konkrete Anwendungen aufzuzeigen.

Diese Arbeit basiert ausschließlich auf einer umfassenden Recherche und Analyse mathematischer Fachbücher. Dadurch können die soeben formulierten Ziele optimal umgesetzt werden.

Um den Leserinnen und Lesern eine anschauliche Idee über Problemstellungen der Graphentheorie zu verschaffen, werden zuerst ihre Anfänge, zurückgehend auf den Mathematiker Leonhard Euler im 18. Jahrhundert, beleuchtet. Hier wird insbesondere das Königsberger Brückenproblem vorgestellt. Anschließend wird die exakte mathematische Definition eines Graphen formuliert, einfache elementare Aussagen über Graphen werden getroffen und Zusammenhänge aufgezeigt. Der Hauptfokus dieser Arbeit liegt auf dem Problem der Knotenfärbung von planaren Graphen, was anschaulich dem Problem der unterschiedlichen Färbung von Ländern auf politischen Landkarten entspricht. Ziel ist, den Sechs- und den Fünf-Farben-Satz zu beweisen und schließlich den berühmten Vier-Farben-Satz vorzustellen, welcher besagt, dass vier Farben ausreichen, um eine politische Karte so einzufärben, dass benachbarte Länder verschiedene Farben bekommen. Den Abschluss bildet ein Ausblick auf praktische Problemstellungen, die mittels Methoden der Graphentheorie bearbeitet werden können.

## 2. Anfänge der Graphentheorie: Das Königsberger Brückenproblem

Die Graphentheorie ist ein relativ junges Teilgebiet der Mathematik. Ihre Anfänge lassen sich ziemlich genau auf das Jahr 1736 zurückdatieren, in die Stadt Königsberg, die heute Kaliningrad heißt. Königsberg liegt an der Pregel, ein Fluss, der die Stadt durchfließt und im Stadtgebiet zwei Inseln bildet. Diese Inseln und das Festland werden durch Brücken verbunden. Genauer gesagt gehen von der ersten Insel vier Brücken zum Festland und von der zweiten Insel zwei Brücken zum Festland aus. Zusätzlich sind auch die beiden Inseln durch eine Brücke vernetzt, siehe Abbildung 1.

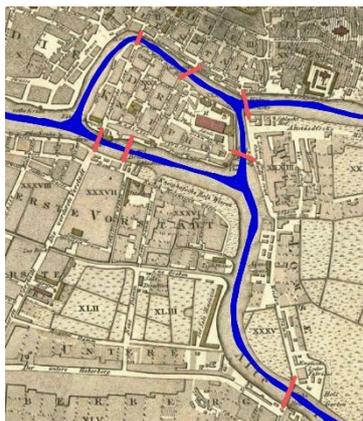


Abbildung 1 Ein Stadtplan von Königsberg

Die Bewohner und Bewohnerinnen von Königsberg gingen gerne an einem Sonntag eine Runde spazieren. Eines Tages stellten sie sich die Frage, ob es möglich wäre, ihren Spaziergang so zu planen, dass sie jede Brücke der Stadt dabei genau einmal überqueren und schließlich wieder an ihren Ausgangspunkt zurückkehren. Obwohl diese Frage einfach klingt, konnte sie niemand lösen. Deshalb wurde der Mathematiker Leonhard Euler gebeten, sich mit diesem Problem zu beschäftigen oder es gar zu lösen.

Leonhard Euler (1707-1783), in Abbildung 2 zu sehen, war einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, der wichtige Beiträge zu verschiedenen Teilbereichen der Mathematik lieferte. Ursprünglich stammte er aus der Schweiz, Zeit seines Lebens arbeitete er aber als Mathematiker an der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg.



Abbildung 2 Leonhard Euler (1707-1783)

Euler musste die Bürger und Bürgerinnen von Königsberg leider enttäuschen, denn er bewies, dass ein Spaziergang, so wie er von ihnen gewünscht war, nicht möglich ist. Er erkannte, dass es nur auf die Lage der Stadtteile und ihre Lagebeziehungen, also die Brücken, ankommt. Durch eine Abstrahierung des Stadtplanes konnte Euler beweisen, dass von jedem Teil der Stadt eine gerade Anzahl an Brücken ausgehen muss, damit die Vorgaben des gewünschten Spaziergangs erfüllt werden können. In Königsberg waren diese Kriterien nicht erfüllt, denn zur Erinnerung: Von der ersten Insel gingen insgesamt fünf Brücken aus, von der zweiten Insel drei. Es ist allgemein bekannt, dass drei und fünf nicht zur Menge der geraden Zahlen gehören, also sind die Kriterien für den „idealen“ Spaziergang nicht erfüllt.

Euler beweist seine Aussage, indem er den gewünschten Spaziergang der Königsberger und Königsbergerinnen gedanklich plant, siehe Abbildungen 1 und 3: Er versetzt sich in Gedanken auf jene Insel, auf der fünf Brücken enden. Über eine Brücke kann er sie betreten, über die Zweite wieder verlassen. Mit zwei anderen Verbindungen zum Festland, kann er diesen Vorgang ohne weiteres wiederholen, danach ist nur mehr eine Brücke übrig. Über diese betritt er ein drittes Mal die Insel, jedoch ist er nun darauf gefangen. Er hat alle Brücken genau einmal benutzt und hat jetzt keine Möglichkeit mehr, wieder auf das Festland zu gelangen. Genau so kann man für jede andere ungerade Zahl argumentieren.

Euler löste dieses konkrete Problem für Königsberg. Er erkannte jedoch, dass seine Methode auch für andere ähnliche Fragestellungen hilfreich ist. Damit wurde die mathematische Disziplin der Graphentheorie begründet. Eulers Lösungsstrategie basiert auf einer Abstrahierung der Problemstellung, indem er jeder Fläche am Land einen Knoten zuordnet und je zwei Knoten mit einer Linie (Kante) verbindet, wenn die entsprechenden Landflächen mit einer Brücke verbunden sind. Die entstehende Struktur führt zum mathematischen Begriff eines Graphen.<sup>1</sup>

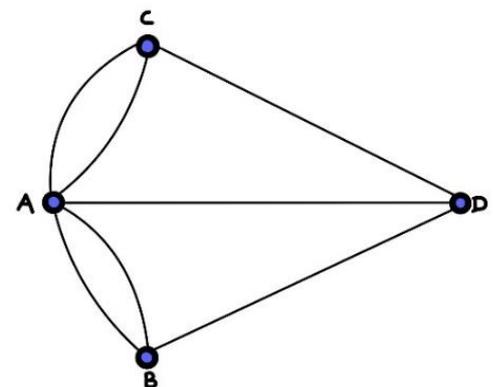


Abbildung 3 Übersichtlicherer Graph der Problemstellung

Abbildung 3 zeigt einen etwas übersichtlicheren Graphen der Problemstellung.

<sup>1</sup> vgl. Baptist, Peter/ Beutelspacher, Albrecht: Ein Spaziergang mit Herrn Euler. In: Baptist, Peter: Alles ist Zahl. 2. Auflage. Köln: Kölner Universitätsverlag, 2009, S.29-39.

### 3. Definition und Eigenschaften eines Graphen

#### 3.1 Definition

Ein Graph  $G$  setzt sich aus einer endlichen Menge an Knoten  $V$  und einer endlichen Menge an Kanten  $E$  zusammen. Man schreibt  $G = (V, E)$ . Jede Kante  $e$  aus der Kantenmenge  $E$  ist zwei Knoten aus der Knotenmenge  $V$  zugeordnet.<sup>2,3</sup>

Die Buchstaben für die Bezeichnung der Knoten- und Kantenmenge eines Graphen kommen von den englischen Wörtern „vertex“ (= Knoten) und „edge“ (= Kante).<sup>4</sup> „Die Zugehörigkeit einer Knotenmenge  $V$  und einer Kantenmenge  $E$  zu einem Graphen  $G$  wird auch durch die Schreibweise  $V(G)$  bzw.  $E(G)$  verdeutlicht.“<sup>5</sup>

„Eine Kante  $e \in E$  wird in der Form  $e = \{u, v\}$  dargestellt, wobei  $u$  und  $v$  aus der Knotenmenge  $V$  die sogenannten Endknoten der Kante  $e$  sind.“<sup>6</sup> „Eine Kante ist also eine zwei-elementige Teilmenge der Knotenmenge  $V$ . Daraus folgt, dass die Kantenmenge  $E$  eine Teilmenge der zwei-elementigen Teilmenge der Knotenmenge  $V$  ist, also  $E \subseteq \{\{u, v\}: u, v \in V, u \neq v\}$ .“<sup>7</sup>

„Man nennt einen Knoten  $v$  inzident zur Kante  $e$ , wenn er ein Endknoten von  $e$  ist. Die Anzahl der Knoten eines Graphen  $G$  wird mit  $n$  und die Anzahl der Kanten mit  $m$  bezeichnet.“<sup>8</sup>

Wenn zwei Knoten  $u, v \in V(G)$  durch die Kante  $e = \{u, v\}$  verbunden sind, nennt man die beiden Knoten adjazent in  $G$ , was so viel wie „benachbart“ bedeutet.<sup>9</sup> Manchmal erlaubt man auch sogenannte Schlingen, das sind Kanten deren Eckpunkte zusammenfallen, also der Form  $e = \{v, v\}$  sind.<sup>10</sup>

Liegen zwei oder mehrere Kanten zwischen denselben Endknoten, nennt man ihre Beziehung zueinander parallel.<sup>11</sup>

---

<sup>2</sup> vgl. Beutelspacher, Albrecht/ Zschiegner, Marc-Alexander: Diskrete Mathematik für Einsteiger. 5. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2014, S.175.

<sup>3</sup> vgl. Tittmann, Peter: Graphentheorie. Eine anwendungsorientierte Einführung. 4. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 2022, S.13.

<sup>4</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.13.

<sup>5</sup> Tittmann, 2022, S.13-14.

<sup>6</sup> ebd., S.13-14.

<sup>7</sup> Taraz, Anusch: Diskrete Mathematik. Grundlagen und Methoden. Mathematik Kompakt. Basel: Birkhäuser/ Springer, 2012. S.41.

<sup>8</sup> ebd., S.13-14.

<sup>9</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.14.

<sup>10</sup> ebd., S.14.

<sup>11</sup> ebd., S.14.

Besitzt ein Graph weder Schlingen noch parallele Kanten, bezeichnet man ihn als schlichten Graphen.<sup>12</sup>

Im Folgenden werden die soeben eingeführten Begriffe mit Hilfe eines Beispielgraphen (siehe Abbildung 4) anschaulich gemacht und verdeutlicht:

Dieser Graph  $G$  bestehe aus der Knotenmenge  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  und den Kanten  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ . Man erhält also  $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h\})$  mit den Kanten  $a = \{1, 2\}$ ,  $b = \{2, 3\}$ ,  $c = \{3, 4\}$ ,  $d = \{4, 5\}$ ,  $e = \{5, 6\}$ ,  $f = \{6, 6\}$ ,  $g = \{5, 7\}$  und  $h = \{5, 7\}$ .

Die Anzahl  $n$  der Knoten im Graph  $G$  beträgt 7 und die Anzahl der Kanten  $m$  beträgt 8.

Die Kante  $a$  hat die Endpunkte  $u = 1$  und  $v = 2$ , die Kante  $b$  besitzt die Endpunkte  $u = 2$  und  $v = 3$ . Bei allen anderen Kanten geht es äquivalent. Der Knoten 3 ist unter anderem inzident zur Kante  $b$ , weil der Knoten 3 ein Endknoten der Kante  $b$  ist.

Die Endknoten der Kante  $f$  sind zusammengefallen, es ist nämlich zweimal der Knoten  $v = 6$ , also heißt die Kante  $f$  Schlinge.

Die Kanten  $g$  und  $h$  liegen zwischen denselben Endknoten mit  $u = 5$  und  $v = 7$ . Sie sind also parallel zueinander.

Die Knoten 3 und 4 sind adjazent (benachbart) in  $G$ , weil sie durch die Kante  $c$  verbunden werden.

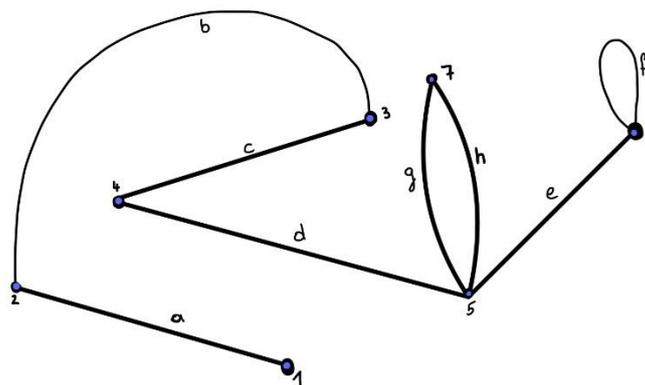


Abbildung 4 Beispielgraph 1

### 3.2 Knotengrade

Der Grad oder Knotengrad  $\deg(v)$  eines Knotens  $v \in V(G)$  gibt die Anzahl der Kanten an, die von  $v$  ausgehen.<sup>13</sup>

<sup>12</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.14.

<sup>13</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.15-16.

Der kleinste in  $G$  vorkommende Grad  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg(v)$  wird Minimalgrad genannt, der größte in  $G$  vorkommende Grad  $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$  heißt Maximalgrad.<sup>14</sup>

Wenn man alle Grade eines Graphen addiert, wird jede Kante zwei Mal gezählt, da jede Kante zwei Knoten verbindet. In einem Graph  $G = (V, E)$  mit  $m$  Kanten gilt also stets, dass die Summe aller Grade doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten ist. Als Formel ausgedrückt schreibt man:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m.<sup>15</sup>$$

Daraus kann man folgern, dass in einem Graphen die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad immer eine gerade Zahl sein muss.<sup>16</sup> Das ist unter dem Begriff Handschlaglemma bekannt. Auch bei Beispielgraph 1 in Abbildung 4 trifft das zu. Dieser hat nämlich zwei Knoten, den Knoten 1 und den Knoten 6, mit ungeradem Knotengrad.

### 3.3 Wichtige Typen von Graphen

#### 3.3.1 Der vollständige Graph

Der vollständige Graph mit  $n$  Knoten wird mit dem Großbuchstaben  $K_n$  bezeichnet. Er besitzt zwischen je zwei Knoten genau eine Kante. Der vollständige Graph  $K_n$  besitzt also alle möglichen Kanten zwischen sämtlichen Knoten. In der Abbildung 5 sieht man die vollständigen Graphen  $K_1$  bis  $K_6$ .

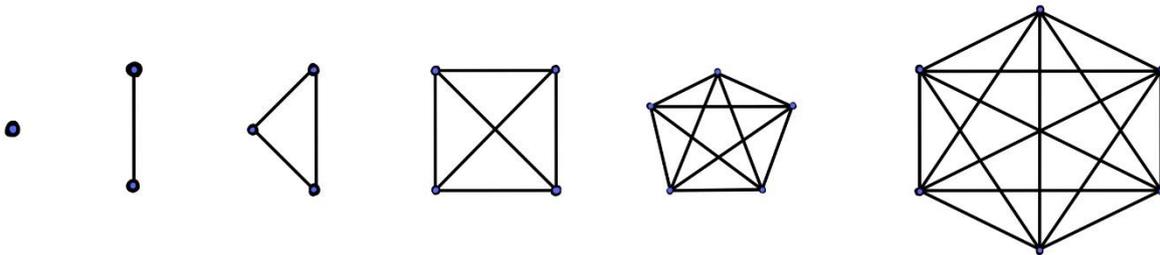


Abbildung 5 Die vollständigen Graphen  $K_1$  bis  $K_6$

Weiß man von einem vollständigen Graphen  $K_n$  nur die Anzahl der Knoten, kann man sich die dazugehörige Anzahl der Kanten ausrechnen:<sup>17</sup>

<sup>14</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.15-16.

<sup>15</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.15.

<sup>16</sup> ebd., S.15.

<sup>17</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.21-22.

In einem vollständigen Graph ist jeder Knoten mit jedem anderen verbunden. Hat der gesamte Graph also  $n$  Knoten, müssen von jedem Knoten  $n-1$  Kanten ausgehen, damit alle Knoten verbunden werden.

Man rechnet  $n(n-1)$ , da von jedem der  $n$  Knoten  $(n-1)$  Kanten ausgehen. Um auf die richtige Anzahl der Kanten zu kommen, muss noch durch zwei dividiert werden, da sonst jede Kante doppelt gezählt werden würde.

Es gilt also: Ein vollständiger Graph  $K_n$  mit  $n$  Knoten hat genau  $\frac{n(n-1)}{2}$  Kanten.

### 3.3.2 Weg und Kreis

Ein Weg besitzt die Knotenmenge  $\{1, \dots, n\}$  und die Kantenmenge  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ .

Die Knoten  $1$  und  $n$  sind nicht miteinander verbunden. Er wird mit  $P_n$  bezeichnet, da Weg auf Englisch „path“ heißt (Abbildung 6).

Verbindet man den ersten und letzten Knoten, in diesem Fall den Knoten  $1$  und den Knoten  $n$ , erhält man einen Kreis  $C_n$ , von dem englischen Wort „cycle“ stammend. Bei einem Kreis ist die Knotenfolge „geschlossen“ (Abbildung 7).<sup>18</sup>



Abbildung 6 Ein Weg  $P_7$

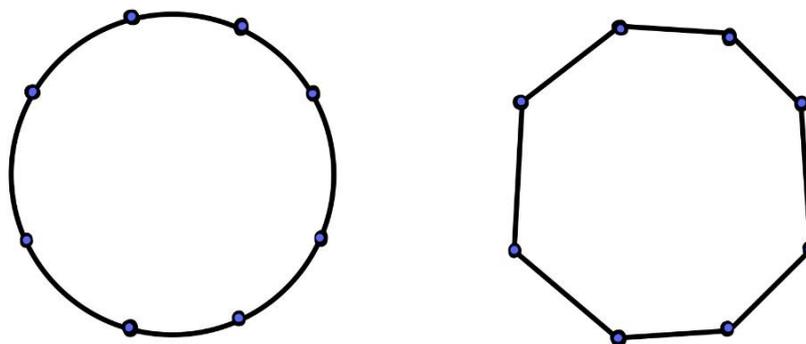


Abbildung 7 Zwei Kreise  $C_8$

---

<sup>18</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.22.

„Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt zusammenhängend, wenn zwischen je zwei Knoten seiner Knotenmenge ein Weg existiert.“<sup>19</sup> Zum Beispiel sind die vollständigen Graphen  $K_n$  und Kreise  $C_n$  jeweils zusammenhängende Graphen.

### 3.3.3 Baum

Ein Baum, siehe Abbildung 8, ist ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält.

Baum heißt auf Englisch „tree“, darum wird er mit  $T_n$  bezeichnet.

Jeder Baum mit  $n$  Knoten besitzt genau  $n-1$  Kanten.<sup>20</sup> „Für zusammenhängende Graphen gilt dabei die Umkehrung: Jeder zusammenhängende Graph mit  $n$  Knoten und  $n-1$  Kanten ist ein Baum.“<sup>21</sup> Später wird nochmals darauf zurückgekommen werden.

Einen Weg kann man als Spezialfall eines Baumes auffassen. Der Unterschied besteht darin, dass ein Baum auch sogenannte Verzweigungen haben kann. Bei einem Weg gehen von einem Knoten nie mehr als zwei Kanten aus. Der Baum ganz links in der Abbildung 8 ist also gleichzeitig auch ein Weg.

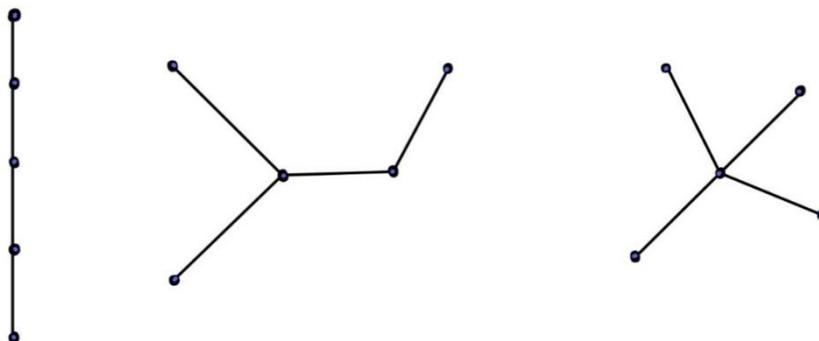


Abbildung 8 Drei Bäume  $T_5$

---

<sup>19</sup> Tittmann, 2022, S.17.

<sup>20</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.22.

<sup>21</sup> Matoušek, Jiří/ Nešetřil, Jaroslav: Diskrete Mathematik. Eine Entdeckungsreise. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2002, S.156.

## 4. Planare Graphen

Man bezeichnet einen Graphen, den man ohne Überschneidung der Kanten in eine Ebene zeichnen kann, als planaren Graphen.<sup>22</sup>

Der Graph in Abbildung 9 ist planar.

Es lässt sich beobachten, dass die Zeichnung eines planaren Graphen die Ebene in Flächen aufteilt, für die auch die Bezeichnung „Gebiete“ üblich ist. Die Anzahl der Flächen wird mit  $f$  bezeichnet.

Es gibt immer mindestens eine Fläche, die äußere oder auch unendliche Fläche.<sup>23,24</sup> Der Graph in Abbildung 9 teilt die Ebene in 4 Flächen, wobei  $F_4$  die äußere Fläche ist.

„Die Anzahl der Flächen eines planaren Graphen ist unabhängig von der konkreten Zeichnung in die Ebene.“<sup>25</sup>

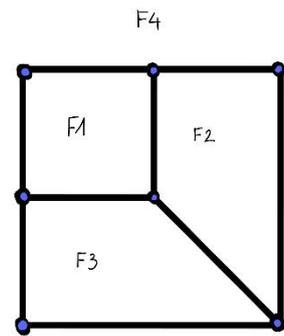


Abbildung 9 Beispiel für einen planaren Graphen

### 4.1 Die Eulersche Polyederformel

In einem zusammenhängenden, planaren Graphen erfüllen die Kantenanzahl  $m$ , die Knotenanzahl  $n$  und die Anzahl der Flächen  $f$  eine bemerkenswert einfache Beziehung, die Leonhard Euler entdeckte. Dieses Resultat ist als Eulersche Polyederformel bekannt.<sup>26</sup>

#### Satz 1 (Eulersche Polyederformel):

Für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen mit Kantenanzahl  $m$ , Knotenanzahl  $n$  und Anzahl der Flächen  $f$  gilt:

$$n - m + f = 2.^{27}$$

Zum Beispiel hat der Graph in Abbildung 9  $m = 9$  Kanten,  $n = 7$  Knoten und  $f = 4$  Flächen.

Damit ist  $n - m + f = 7 - 9 + 4 = 2$ .

---

<sup>22</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.44.

<sup>23</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.46.

<sup>24</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.190.

<sup>25</sup> Tittmann, 2022, S.50.

<sup>26</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.49-50.

<sup>27</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.50.

*Beweis:* Die Formel kann durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Knoten und Kanten bewiesen werden. Es ist leicht zu erkennen, dass die Formel für einen Graphen gilt, der aus  $n = 1$  Knoten und  $m = 0$  Kanten besteht und folglich die Ebene in  $f = 1$  Fläche teilt. Dann gilt nämlich

$$n-m+f = 1-0+1=2.^{28}$$

Es sei nun  $G$  ein zusammenhängender, planarer Graph mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten, der die Eulersche Polyederformel erfüllt. Im Folgenden werden wir also beweisen, dass jeder Graph, der einen Knoten oder eine Kante mehr besitzt, diese Formel ebenso erfüllt.<sup>29</sup>

Fügt man zu  $G$  einen neuen Knoten hinzu, hat man zwei Möglichkeiten diesen zu platzieren. Entweder setzt man den neuen Knoten auf eine schon vorhandene Kante von  $G$ , wobei diese geteilt wird und eine neue Kante entsteht oder man setzt den Knoten in irgendeine Fläche von  $G$ . Damit der Graph zusammenhängend bleibt, muss man den neuen Knoten durch eine neue Kante mit  $G$  verbinden. Bei beiden Möglichkeiten nimmt die Knotenanzahl  $n$  und die Kantenanzahl  $m$  um jeweils  $1$  zu, wobei die Anzahl der Flächen  $f$  gleichbleibt.<sup>30</sup> Damit gilt dann

$$(n+1)-(m+1)+f = n+1-m-1+f = n-m+f = 2.$$

Fügt man zu  $G$  aber eine neue Kante hinzu, so muss diese immer zwischen zwei Knoten verlaufen. Diese Kante zerlegt eine bestehende Fläche in zwei neue Flächen. Bei diesem Vorgang nimmt die Kantenanzahl  $m$  und die Anzahl der Flächen  $f$  um jeweils  $1$  zu, wobei die Anzahl der Knoten  $n$  gleichbleibt.<sup>31</sup> Damit gilt dann wieder

$$n-(m+1)+(f+1) = n-m-1+f+1 = n-m+f = 2.$$

In beiden Fällen bleibt die Eulersche Polyederformel erhalten, folglich gilt sie für alle zusammenhängenden, planaren Graphen. q.e.d.<sup>32</sup>

---

<sup>28</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.50.

<sup>29</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.50.

<sup>30</sup> ebd., S.50.

<sup>31</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.50.

<sup>32</sup> ebd., S.50.

Ein Baum ist ein zusammenhängender, planarer Graph, der die Ebene in  $f = 1$  Fläche „zerteilt“. Damit gilt für einen Baum mit  $n$  Knoten laut der Eulerschen Polyederformel, dass die Anzahl der Kanten gleich  $n-1$  ist, wie bereits im Kapitel 3.3.3. erwähnt wurde.

## 4.2 Weitere Anwendungen der Eulerschen Polyederformel

Aus der Eulerschen Polyederformel kann man weitere Aussagen über planare Graphen folgern. Da sich die Kanten eines planaren Graphen nicht überschneiden dürfen, ist es anschaulich, dass ein planarer Graph im Vergleich zur Knotenanzahl nicht zu viele Kanten haben kann. Diese Beobachtung kann man mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel in einer konkreten Ungleichung ausdrücken.<sup>33,34</sup>

**Satz 2:** Ein schlichter planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten besitzt höchstens  $3n-6$  Kanten<sup>35</sup>, das heißt, für die Kantenanzahl  $m$  gilt

$$m \leq 3n-6.<sup>36</sup>$$

*Beweis:* Ein planarer Graph  $G$  mit  $n \geq 3$  zerlegt die Ebene in  $f$  Flächen. Für eine Fläche  $F$  sei  $m(F)$  die Anzahl der Kanten, die  $F$  begrenzen. Da eine Fläche von mindestens 3 Kanten begrenzt wird, gilt

$$\sum_F m(F) \geq 3f,$$

dabei wird auf der linken Seite die Summe über alle Flächen  $F$  gebildet.<sup>37</sup>

Gleichzeitig berandet eine Kante  $m(F)$  immer 2 Flächen, darum gilt

$$\sum_F m(F) \leq 2m.$$

Zusammen ergibt sich also  $2m \geq 3f$ , beziehungsweise  $\frac{2}{3}m \geq f$ .

Setzt man dies in die Eulersche Polyederformel ein, so ergibt sich

$$n-m+\frac{2}{3}m \geq n-m+f = 2.<sup>38</sup>$$

---

<sup>33</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.191.

<sup>34</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.54.

<sup>35</sup> ebd., S.54.

<sup>36</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.191.

<sup>37</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.192.

<sup>38</sup> ebd., S.192.

Daraus folgt nun  $n - \frac{m}{3} \geq 2$ , beziehungsweise

$$3n - 6 \geq m.$$

Hiermit ist die Beziehung zwischen der Kantenanzahl  $m$  und der Knotenanzahl  $n$  in schlichten planaren Graphen mit  $n \geq 3$  bewiesen. q.e.d.<sup>39</sup>

Mithilfe von Satz 2, der durch die Eulerschen Polyederformel bewiesen wird, ist es des Weiteren möglich zu beweisen, dass es auch nichtplanare Graphen gibt. Es ist leicht ersichtlich, dass die vollständigen Graphen  $K_1$  bis  $K_4$  planar sind. Es stellt sich also die Frage, ob auch der vollständige Graph  $K_5$  planar ist. Mit der soeben bewiesenen Ungleichung bezüglich der Beziehung der Kantenanzahl und der Knotenanzahl eines schlichten planaren Graphen kann ein Widerspruch erzeugt werden, der zeigt.<sup>40</sup>

**Satz 3:** Der vollständige Graph  $K_5$  ist nichtplanar.<sup>41</sup>

*Beweis:* Der  $K_5$  hat  $n = 5$  Knoten und  $m = \frac{n(n-1)}{2} = 10$  Kanten. Man nehme an, dass der  $K_5$  planar ist. Dann muss die Ungleichung aus Satz 2 richtig sein.

Setzt man nun die konkreten Werte  $n = 5$  und  $m = 10$  in die Ungleichung  $3n - 6 \geq m$  ein, so ergibt sich  $3 \times 5 - 6 \geq 10$ , beziehungsweise  $10 \leq 9$ . Es ist klar, dass es sich hier um eine falsche Aussage handelt. Durch diesen Widerspruch ist bewiesen, dass die Annahme, dass  $K_5$  planar sei, falsch ist. q.e.d.<sup>42</sup>

Aus Satz 3 kann man des Weiteren eine Aussage über die Planarität von vollständigen Graphen schlussfolgern. Da jeder vollständige Graph  $K_n$  mit  $n \geq 5$  den  $K_5$  enthält, kann es keinen  $K_n$  mit  $n \geq 5$  geben, der planar ist.<sup>43</sup>

Mithilfe von Satz 2 kann man außerdem eine Aussage über die Knotengrade in schlichten planaren Graphen erhalten:<sup>44</sup>

---

<sup>39</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.192.

<sup>40</sup> ebd., S.192.

<sup>41</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.51.

<sup>42</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.192.

<sup>43</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.193.

<sup>44</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.55.

**Satz 4:** „Jeder schlichte planare Graph besitzt mindestens einen Knoten  $v$  mit  $\deg(v) \leq 5$ .“<sup>45</sup>

*Beweis:* Es sei  $G$  ein schlichter planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Angenommen, alle Knoten aus  $V(G)$  besitzen Grad  $\deg(v) \geq 6$ . Im Kapitel 3.2 wurde bereits gezeigt, dass die Summe aller Grade  $\deg(v)$  der doppelten Menge der Kanten entspricht. Laut Annahme besitzt jeder Knoten mindestens Grad 6, darum muss die Summe aller Knotengrade mindestens 6 mal die Knotenanzahl sein:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 6 = 6n.$$

Damit erhält man die Abschätzung  $3n \leq m$ . Für schlichte planare Graphen gilt jedoch, wie bereits in Satz 2 gezeigt,  $3n-6 \geq m$ . Somit gilt

$$3n \leq m \leq 3n-6,$$

was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Daher kann die anfängliche Annahme nicht zutreffen und die Existenz eines Knotens  $v$  mit  $\deg(v) \leq 5$ , also Satz 4, ist damit bewiesen. q.e.d.

---

<sup>45</sup> Tittmann, 2022, S.52.

## 5. Der Vier-Farben-Satz

### 5.1 Problemstellung und Geschichte

Beschäftigt man sich mit der Graphentheorie, so wird man sich früher oder später unweigerlich mit einer ihrer wichtigsten Fragestellungen, nämlich der Knotenfärbungen von Graphen, auseinandersetzen müssen. Den Ursprung dieses Zweiges der Graphentheorie bildete das Vier-Farben-Problem, das Mitte des 19. Jahrhunderts aufkam und die Mathematiker und Mathematikerinnen lange beschäftigte, bis es schließlich bewiesen werden konnte.<sup>46</sup>

Der Vier-Farben-Satz besagt, dass beim Färben einer beliebigen politischen Landkarte genau vier Farben reichen, um die einzelnen Länder auf der Karte so zu färben, dass niemals zwei Länder, die sich eine Grenze teilen, in der gleichen Farbe eingefärbt werden.<sup>47</sup>

Lange war der Vier-Farben-Satz nur eine Vermutung, daher bezeichnet man diese Problemstellung auch oft als Vier-Farben-Problem. Der erste, der diese Vermutung äußerte, war Francis Guthrie (1831-1899), ein britischer Botaniker und Mathematiker. Ihm fiel beim Einfärben einer englischen Landkarte auf, dass dabei vier Farben ausreichen, um die Karte so zu färben, dass Länder mit gemeinsamen Grenzverlauf nie die gleiche Farbe haben.<sup>48</sup>

Über seinen Bruder Frederick Guthrie (1833-1886) gelangte diese Überlegung zum Professor für Mathematik, Augustus de Morgan (1806-1871), der maßgeblich an ihrer Verbreitung beteiligt war.<sup>49</sup>

Einige Jahre später legte ein Jurist namens Alfred Bray Kempe (1849-1922) in seiner Arbeit „On the geographical problem of the four colors“ einen „Beweis“ des Vier-Farben-Problems vor. Jedoch entdeckte Percy John Heawood (1861-1955) bald einen Fehler im Beweis. Über viele Jahre hinweg beschäftigten sich viele Forscher und Forscherinnen weiter mit dem Vier-Farben-Problem und versuchten es zu beweisen. Der endgültige und mehrfach geprüfte Beweis wurde erst viele Jahre später, nämlich 1976, von Kenneth Appel und Wolfgang Haken erbracht.<sup>50</sup>

Der Vier-Farben-Satz ist einer der wichtigsten Beispiele dafür, dass es sinnvoll ist, Probleme

---

<sup>46</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.194.

<sup>47</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.75.

<sup>48</sup> ebd., S.75.

<sup>49</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.194.

<sup>50</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.194-195.

in die Sprache der Graphentheorie zu übersetzen. Die Aufgabenstellung ist so einfach zu erklären, dass sogar Laien das Problem einfach nachvollziehen können. Das Ziel ist nun, diese „außermathematische“ Situation durch eine mathematische Struktur, in diesem Fall einem Graphen, zu beschreiben, um das Problem zu lösen. Dieser Vorgang wird auch Modellierung genannt.<sup>51,52</sup>

Wir beginnen also damit, eine Landkarte in einen Graphen umzuwandeln. Zuerst stellen wir uns den „Mittelpunkt“ eines jeden Landes auf der Karte vor, diese werden die Knoten in unserem Graphen repräsentieren. Wenn zwei Länder eine gemeinsame Grenze haben, so verbinden wir die entsprechenden „Mittelpunkte“ und erhalten so die Kanten. Es ist dabei völlig anschaulich, dass der so entstandene Graph stets planar ist.<sup>53</sup>

Die folgenden Abbildungen 10 und 11 zeigen eine Modellierung Österreichs. Jedes Bundesland wird durch einen Knoten dargestellt und benachbarte Bundesländer werden durch Kanten verbunden. Abbildung 11 zeigt den entstandenen Graphen.

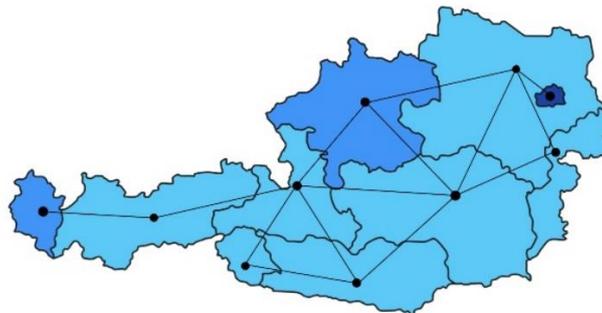


Abbildung 10 Beispielgraph Österreich 1

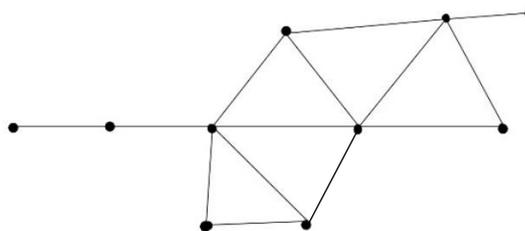


Abbildung 11 Beispielgraph Österreich 2

---

<sup>51</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.75.

<sup>52</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.195.

<sup>53</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.195.

Im nächsten Schritt werden wir nun die Knoten einfärben, jedoch ist nicht jede Färbung der Knoten zulässig, damit unser Graph den Bedingungen des Vier-Farben-Problems entspricht.<sup>54</sup>

## 5.2 Zulässige Färbung

Zunächst definieren wir den Begriff einer „zulässigen Färbung“:

Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$ . Sprechen wir von der Färbung der Knoten in  $G$ , so ordnen wir einem Knoten in  $G$  eine Farbe aus einer gegebenen Menge von Farben zu. Eine Färbung wird als zulässig definiert, wenn je zwei adjazenten Knoten in  $G$  niemals die gleiche Farbe zugeordnet wird. Statt „zulässiger Färbung“ kann auch der Begriff „gültige Färbung“ verwendet werden.<sup>55</sup>

Wir werden uns im Folgenden nur mit schlichten Graphen auseinandersetzen, da ein Graph mit Schlinge laut dieser Definition keine zulässige Färbung besitzt und parallele Kanten keine Auswirkungen auf die Zulässigkeit einer Färbung haben.<sup>56</sup>

## 5.3 Die chromatische Zahl

Die minimale Anzahl von Farben  $c$ , die benötigt wird, um einen Graphen  $G$  zulässig zu färben, heißt die chromatische Zahl von  $G$ . Man bezeichnet sie mit  $\chi(G)$ , denn  $\chi$  ist der griechische Buchstabe „chi“, der Anfangsbuchstabe des Wortes „chroma“, was „Farbe“ bedeutet.<sup>57,58</sup>

Für Graphen mit einer leeren Kantenmenge gilt  $\chi(G) = 1$ .<sup>59</sup>

Für einen Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten gilt  $1 \leq \chi(G) \leq n$ .<sup>60</sup>

Für einen vollständigen Graphen  $K_n$  gilt  $\chi(K_n) = n$ , denn, da alle Knoten verbunden sind, müssen sie auch alle eine unterschiedliche Farbe haben.<sup>61</sup> Der Graph  $K_6$  in der Abbildung 12 benötigt sechs verschiedene Farben für eine zulässige Färbung.

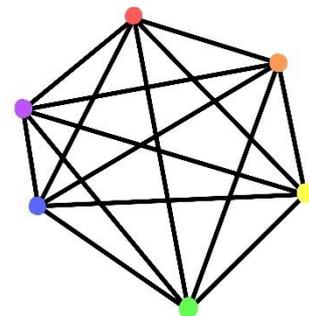


Abbildung 12 Ein zulässig gefärbter  $K_6$

<sup>54</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.195-196.

<sup>55</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.75-76.

<sup>56</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.76.

<sup>57</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.76.

<sup>58</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.196.

<sup>59</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.76.

<sup>60</sup> ebd., S.76.

<sup>61</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.77.

Für einen Baum  $T_n$  gilt immer  $\chi(T_n) = 2$ , denn die benachbarten Knoten eines beliebigen Knotens eines Baumes sind nicht direkt durch Kanten miteinander verbunden, da ansonsten ein Kreis entstehen würde. So kann man zum Beispiel, wie in Abbildung 13, einen Knoten blau färben und alle seine adjazenten Knoten grün. Die Nachbarknoten der grünen Knoten färbt man wiederum blau und wiederholt den Prozess so lange, bis der Baum  $T_n$  vollständig eingefärbt ist.<sup>62</sup>

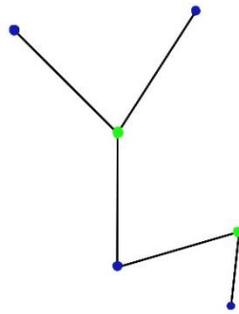


Abbildung 13 Ein zulässig gefärbter  $T_6$

Bei einem Kreis  $C_n$  kann  $\chi(C_n)$  zwei Werte annehmen, je nachdem, ob  $n$  gerade oder ungerade ist.

Man beginnt mit der Färbung bei einem beliebigen Knoten und ordnet ihm eine Farbe, zum Beispiel lila, zu. Seine beiden adjazenten Knoten werden orange gefärbt und deren adjazente Knoten wieder lila, siehe Abbildung 14. Man fährt so fort, bis der ganze Kreis  $C_n$  eingefärbt ist.

Ist  $n$  gerade, so geht es sich aus, dass der letzte Knoten orange ist und die Färbung also zulässig ist. Es gilt also  $\chi(C_n) = 2$ .<sup>63,64</sup>

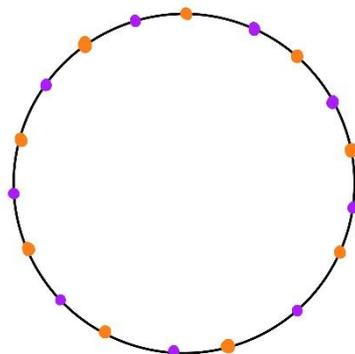


Abbildung 14 Ein zulässig gefärbter  $C_{18}$

<sup>62</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.77.

<sup>63</sup> ebd., S.77.

<sup>64</sup> vgl. Aigner, Martin: Graphentheorie. Eine Einführung aus dem 4-Farben Problem. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015, S.76.

Ist  $n$  aber ungerade, so würde dem letzten und dem ersten Knoten die gleiche Farbe zugeordnet werden. Also wird eine dritte Farbe, in Abbildung 15 ist es blau, benötigt, damit die Färbung zulässig ist, daher gilt  $\chi(C_n) = 3$ .<sup>65</sup>

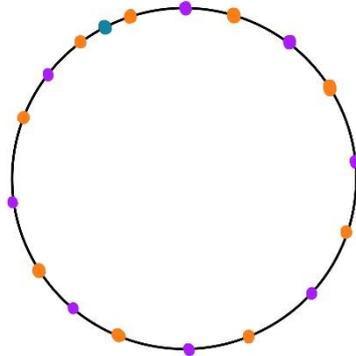


Abbildung 15 Ein zulässig gefärbter  $C_{19}$

Nun können wir die Formulierung des Vier-Farben-Problems vereinfachen. Die Frage lautet in der Sprache der Graphentheorie, ob die chromatische Zahl  $\chi$  eines planaren Graphen höchstens 4 beträgt.<sup>66</sup>

#### 5.4 Der Greedy-Algorithmus

Die chromatische Zahl  $\chi$  eines Graphen  $G$  kann mit Hilfe des Maximalgrads  $\Delta(G)$  von  $G$  eingeschränkt werden. Dieses Verfahren wird auch Greedy-Algorithmus genannt.<sup>67</sup>

**Satz 5:** „Jeder Graph  $G$  kann mit  $\Delta(G)+1$  Farben zulässig eingefärbt werden, das heißt für die chromatische Zahl  $\chi(G)$  gilt  $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ .“<sup>68</sup>

*Beweis:* Wir beweisen Satz 5 mit einem Verfahren, mit dem man einen beliebigen Graphen  $G$  mit höchstens  $\Delta(G)+1$  Farben zulässig färben kann.

Die Zahlen  $1, 2, 3, \dots$  sind unsere Farben. Die Knoten bezeichnen wir beliebig mit  $v_1, v_2, v_3, \dots$  Zunächst werden wir den Knoten  $v_1$  mit der Farbe  $1$  färben. Sind die Knoten  $v_1$  bis  $v_{i-1}$  bereits gefärbt, betrachten wir den nächsten Knoten  $v_i$ . Diesen färben wir mit der kleinsten zulässigen Farbe ein, das heißt mit der kleinsten Farbe, die bei keinem Nachbarknoten

<sup>65</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.77.

<sup>66</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.196.

<sup>67</sup> ebd., S.196.

<sup>68</sup> Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.196.

bereits vorkommt. Der schlimmste Fall, der in diesem Färbeprozess eintreten kann ist, dass der Knoten  $v_i$  den Maximalgrad  $\Delta(G)$  besitzt. Alle Nachbarecken von  $v_i$  sind in diesem schlimmsten Fall bereits eingefärbt, und zwar alle in verschiedenen Farben. Die kleinste zulässige Farbe, die bleibt, mit der wir den Knoten  $v_i$  als nächstes einfärben können, ist jetzt also  $\Delta(G)+1$ . q.e.d.<sup>69</sup>

Satz 5 gilt für alle Graphen, auch für jene, die nicht planar sind. Für planare Graphen reichen stets vier Farben aus, um sie gültig einzufärben. Eben dies wurde mit dem Vier-Farben-Satz bewiesen, doch zum Beweis selbst folgt später mehr.<sup>70</sup>

Um sich dem Problem anzunähern, zeigen wir zunächst, dass es möglich ist mit mehr als vier Farben einen planaren Graphen gültig zu färben. Als erstes wird der Sechs-Farben-Satz bewiesen und im Folgenden wird dann die Anzahl der Farben auf 5 reduziert.

## 5.5 Der Sechs-Farben-Satz

**Satz 6 (Sechs-Farben-Satz):** „Jeder planare Graph ist 6-färbbar.“<sup>71</sup>

*Beweis:* Dieser Satz kann durch vollständige Induktion nach Anzahl der Knoten bewiesen werden. Es ist offensichtlich, dass der Satz auf alle Graphen mit der Knotenanzahl  $n \leq 6$  zutrifft. Nun weitet man die Knotenanzahl aus und nimmt an, dass der Satz für alle Graphen mit  $n$  Knoten wahr ist. Als nächstes betrachten wir einen Graphen  $G$  mit  $n+1$  Knoten. Wie schon im Satz 4 gezeigt wurde, besitzt ein schlichter, planarer Graph mindestens einen Knoten  $v$ , für den gilt  $\deg(v) \leq 5$ . Wenn man diesen Knoten  $v$  und alle Kanten, die zu  $v$  führen, aus dem Graph  $G$  entfernt, so erhält man einen Graphen  $G'$  mit  $n$  Knoten, der aufgrund der Induktionsannahme sicher 6-färbbar ist. Der Knoten  $v$  hat höchstens fünf adjazente Knoten in  $G'$ , es ist also in jedem Fall noch eine sechste Farbe verfügbar, um auch den Knoten  $v$  einzufärben. Damit ist bewiesen, dass der Sechs-Farben-Satz, also Satz 6, wahr ist. q.e.d.<sup>72</sup>

Durch diesen Satz ist bewiesen, dass die chromatische Zahl  $\chi$  eines planaren Graphen höchstens 6 ist. Im nächsten Schritt wird der Beweis noch optimiert werden, in dem man

---

<sup>69</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.197.

<sup>70</sup> ebd., S.197.

<sup>71</sup> Tittmann, 2022, S.79.

<sup>72</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.79-80.

zeigt, dass sogar fünf Farben ausreichen, um einen planaren Graphen gültig zu färben. Damit nähert man sich immer mehr der Aussage des Vier-Farben-Satzes an.

## 5.6 Der Fünf-Farben-Satz

**Satz 7 (Fünf-Farben-Satz):** „Jeder planare Graph ist 5-färbbar.“<sup>73</sup>

*Beweis:* Der Fünf-Farben-Satz kann wieder durch vollständige Induktion nach der Knotenanzahl  $n$  bewiesen werden.<sup>74</sup>

Für den Fall, dass  $n = 1, 2, 3, 4$  oder  $5$  gilt, ist der Satz offensichtlich war, denn hat ein Graph nicht mehr als 5 Knoten, so kann ohne Problem jedem Knoten eine Farbe zugewiesen werden. Wir nehmen nun an, dass die Aussage für jeden planaren Graphen mit  $n \geq 5$  Knoten wahr ist. Nun soll gezeigt werden, dass die Aussage auch für einen beliebigen planaren Graphen  $G$  mit  $n+1$  Knoten gilt. Wie schon beim Beweis für den Sechs-Farben-Satz macht man sich Satz 4 zu nutzen, laut dem mindestens ein Knoten  $v$  den Grad  $\deg(v) \leq 5$  besitzt. Diesen Knoten  $v$  entfernen wir mit all seinen Kanten aus  $G$ . Als Resultat erhält man einen planaren Graphen  $G'$  mit  $n$  Knoten, auf den die Aussage, laut Induktionsannahme, sicher zutrifft. Das Ziel ist nun, die Färbung von  $G'$  zu einer Färbung von  $G$ , beziehungsweise einer leichten Abwandlung davon, zu vervollständigen.<sup>75</sup>

Hat der Knoten  $v$  Knotengrad  $\deg(v) \leq 4$ , so ist die Aufgabe sehr einfach, denn  $v$  kann dann in der fünften Farbe eingefärbt werden. Auch wenn  $v$  fünf Nachbarknoten hat, diese aber nur vier der fünf verfügbaren Farben verbrauchen, kann  $v$  in der übrigen Farbe problemlos eingefärbt werden.<sup>76</sup>

Der schwierigste Fall tritt ein, wenn  $v$  fünf adjazente Knoten besitzt, die verschieden gefärbt sind und so bereits alle der fünf Farben verbrauchen. Wir nennen diese fünf Nachbarknoten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  und  $v_5$ . Diese Knoten werden mit den Farben 1, 2, 3, 4 und 5 eingefärbt, sodass der Knoten  $v_1$  die Farbe 1, der Knoten  $v_2$  die Farbe 2 usw. besitzt, siehe Abbildung 16. Wie in dieser Abbildung gezeigt, nehmen wir an, dass die fünf Knoten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  und  $v_5$  gegen den Uhrzeigersinn um den Knoten  $v$  angeordnet sind.<sup>77</sup>

---

<sup>73</sup> Tittmann, 2022, S.80.

<sup>74</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.198.

<sup>75</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.198.

<sup>76</sup> ebd., S.198.

<sup>77</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.198-199.

In den Abbildungen 16, 17, 18 und 19 wird der Graph  $G$  gezeigt. Das graue Kästchen stellt den Graphen  $G'$  dar, also  $G$  ohne den Knoten  $v$  und seine dazugehörigen Kanten. Von den  $n$  Knoten aus  $G'$  sind immer die Knoten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  und  $v_5$  dargestellt. Von den restlichen  $n-5$  Knoten sind immer nur jene eingezeichnet, die für den soeben zu behandelnden Fall relevant sind. Alle andere werden durch das graue Kästchen ausgedrückt.

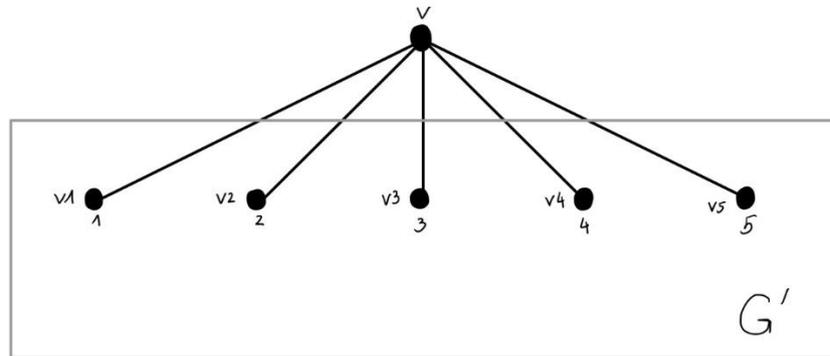


Abbildung 16 Der Knoten  $v$  mit seinen fünf gefärbten Nachbarknoten  $v_1, v_2, v_3, v_4$  und  $v_5$

Durch geschicktes Vorgehen ist es möglich, die Farben so zu vertauschen, dass eine gültige Färbung von  $v$  erreicht wird.<sup>78</sup>

Als erstes betrachtet man die Knoten  $v_1$  und  $v_3$ , welche mit den Farben 1 und 3 eingefärbt sind. Dann suchen wir alle Wege, ausgehend von  $v_1$ , die nur Knoten besitzen, die abwechselnd mit der Farbe 1 und der Farbe 3 eingefärbt sind, siehe Abbildung 17.<sup>79</sup>

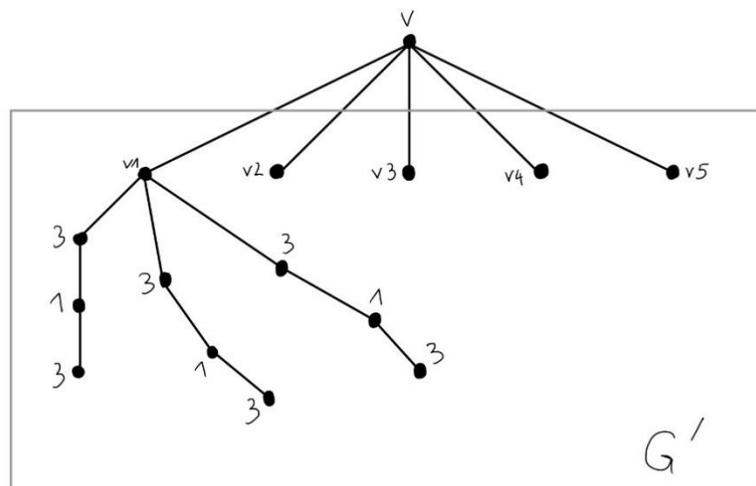


Abbildung 17 Alle Wege in den Farben 1 und 3, die in  $G'$  vom Knoten  $v_1$  ausgehen

<sup>78</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.198.

<sup>79</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.199.

Dabei müssen zwei Fälle unterschieden werden.

**Fall a:** Von all diesen Wegen führt keiner zum Knoten  $v_3$ , wie es in der Abbildung 17 der Fall ist. Also kann man entlang all dieser Wege die Färbungen der Knoten austauschen, das heißt, dass jeder Knoten dieser Wege, der zuvor mit der Farbe 1 eingefärbt war, jetzt die Farbe 3 erhält und umgekehrt. Der Knoten  $v_1$  hat jetzt, wie der Knoten  $v_3$ , die Farbe 3 und auch  $v_3$  besitzt nach wie vor die Farbe 3. Die Farbe 1 ist jetzt also frei geworden, denn sie kommt bei keiner der fünf Nachbarknoten von  $v$  vor. Also kann der Knoten  $v$  mit der Farbe 1 eingefärbt werden und somit ist der ganze Graph  $G$  gültig gefärbt.<sup>80</sup>

**Fall b:** Einer dieser Wege führt von  $v_1$  zu  $v_3$ , siehe Abbildung 18. Dasselbe Vorgehen wie im Fall a ist hier auch möglich, aber nicht sinnvoll, weil die fünf Nachbarknoten von  $v$  auch dann fünf verschiedene Farben besitzen würden. Die Färbung von  $v_1$  und  $v_3$  würde dabei lediglich vertauscht werden.<sup>81</sup>

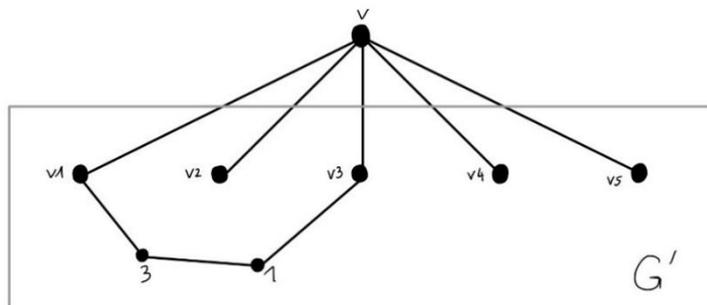


Abbildung 18 Es existiert ein im Fall b beschriebener Weg zwischen  $v_1$  und  $v_3$

Es ist zielführend, das Augenmerk nun auf die Knoten  $v_2$  und  $v_4$  zu legen. Wir gehen analog wie zuvor bei den Knoten  $v_1$  und  $v_3$  vor und betrachten nun alle Wege, die von  $v_2$  ausgehen und nur Knoten besitzen, die mit den Farben 2 und 4 gefärbt sind. Der Graph  $G'$  ist planar. Es kann daher keiner dieser Wege von  $v_2$  nach  $v_4$  führen, weil ein solcher durch den Weg zwischen  $v_1$  und  $v_3$  versperrt werden würde, wie man in der Abbildung 19 erkennen kann. Insbesondere geht auch keiner der Wege von  $v_2$  aus, welche nur über Knoten mit den Farben 2 und 4 zum Knoten  $v_4$  führen.<sup>82</sup>

<sup>80</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.199.

<sup>81</sup> ebd., S.199.

<sup>82</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.199-200.



In einer optimierten Version des Beweises von Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas konnte die Anzahl von problematischen Fällen sogar auf nur noch 633 reduziert werden.<sup>86</sup>

Dies sorgte unter Mathematikern und Mathematikerinnen für großes Aufsehen und viele waren dem Beweis gegenüber eine lange Zeit skeptisch eingestellt, weil man sich auf die korrekte Durchführung des Computers verlassen muss und es nicht möglich ist, jeden einzelnen Beweisschritt selbst nachzuvollziehen. Der Beweis wurde inzwischen aber jedoch oft nachgeprüft und wird weitgehend anerkannt.<sup>87,88,89</sup> Dennoch ist er sehr kompliziert und da der Computer eine essenzielle Hilfe dafür darstellt ist es nicht möglich den genauen Beweis in dieser Arbeit Schritt für Schritt zu erläutern. Die Grundidee ist, das Problem auf endlich viele, aber auf eine sehr hohe Anzahl von Spezialfällen zu reduzieren, die dann alle für sich vom Computer überprüft werden.<sup>90</sup>

---

<sup>86</sup> vgl. Robertson, Neil/ Sanders, Daniel P./ Seymour, Paul/ Thomas, Robin: Efficiently four-coloring planar graphs. In: Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Philadelphia, PA, 1996). ACM, New York, 1996, S.571-575.

<sup>87</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.195.

<sup>88</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.81.

<sup>89</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.197.

<sup>90</sup> vgl. Aigner, 2015, S.175-177.

## 6. Beispiele der Graphentheorie aus dem Alltag

Die Geschichte über die Entstehung der Graphentheorie in Kapitel 1 ist eine nette Anekdote, die den Einstieg in dieses Teilgebiet der Mathematik leicht macht. Auch die Erzählung zur langwierigen Entstehung des Vier-Farben-Satzes macht es einfacher, sich in die Materie hineinzusetzen und das Problem nachzuvollziehen.

In Wirklichkeit ist jedoch das Interesse an der Planung eines Sonntagspaziergangs oder am Ausmalen von Landkarten für die Anwendung gering. Doch es gibt in vielen verschiedenen Bereichen Problemstellungen von weit größerer Bedeutung, zu deren Lösung man sich die Graphentheorie zu Nutze machen kann, da Graphen zur Modellierung für vielfältige netzartige Strukturen dienen können. Sie sind vor allem aufgrund ihrer Einfachheit und Schlichtheit als Modelle sehr beliebt.<sup>91</sup>

Einige Beispiele werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

### 6.1 Frequenzplanung in Funknetzen

Für die Koordinierung von Sendemasten ist die Graphentheorie ein nützliches Hilfswerkzeug. Ein Sendemast ist immer für ein bestimmtes Gebiet zuständig. Befinden sich in einem Gebiet viele dieser Sendestationen, so überlappen sich ihre Sendebereiche. Wenn die Sendemasten in einem Gebiet in der gleichen Frequenz arbeiten, entstehen in diesen Überlappungszonen Störungen, was offensichtlich nicht erwünscht ist. Um solche Störungen zu verhindern, müssen die Sendestationen eines Gebietes in unterschiedlichen Frequenzen arbeiten. Trotzdem soll die Anzahl der verschiedenen Frequenzen möglichst niedrig gehalten werden, da viele unterschiedliche Frequenzen in einem Bereich sehr kostspielig sind.

Um einen besseren Überblick über die Situation in einem bestimmten Gebiet zu bekommen, fertigt man einen Graphen an, in dem jede Sendestation durch einen Knoten dargestellt wird. Im folgenden Beispiel heißen die Sendestationen A, B, C, D, E, F und G, siehe Abbildung 20. Sollten sich die Zuständigkeitsbereiche von zwei Sendestationen überlappen, so werden sie durch eine Kante verbunden und man erhält einen Graphen wie in Abbildung 21. Durch die beiden Abbildungen wird deutlich, dass das Problem durch die mathematische

---

<sup>91</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.12.

Modellierung um einiges übersichtlicher wurde.<sup>92</sup>

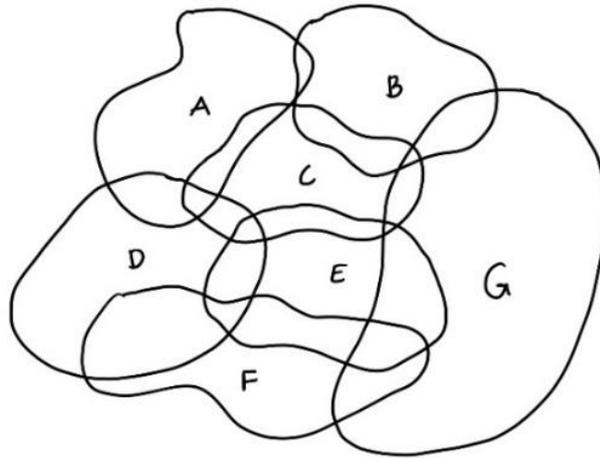


Abbildung 20 Bereiche der Sendestationen A, B, C, D, E, F und G

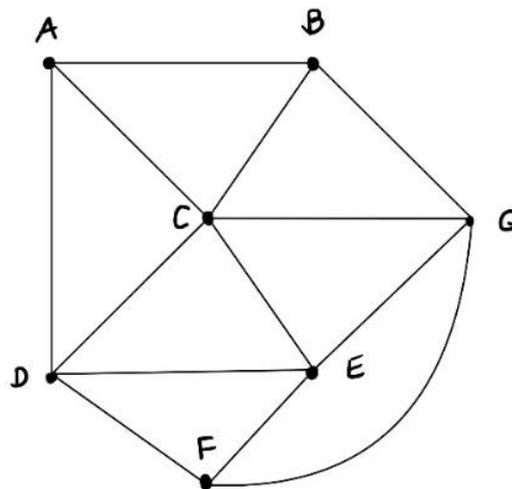


Abbildung 21 Der Graph der Sendestationen

Um nun die Anzahl der Frequenzen zu finden, die eine störungsfreie Frequenzplanung sicherstellt, ist es zielführend, den Graphen einzufärben, siehe Abbildung 22. Dabei steht jeweils eine Farbe für eine Frequenz. Die chromatische Zahl dieses Graphen ist dann die kleinste Anzahl der benötigten Frequenzen. Der Graph im Modell ist planar. Aufgrund von Satz 8 ist bekannt, dass in einem planaren Graphen vier Farben für eine gültige Färbung

---

<sup>92</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.87-88.

ausreichen, siehe Abbildung 22 mit den Farben türkis, blau, lila und pink. Also ist auch völlig klar, dass vier Frequenzen für einen reibungslosen Ablauf genügen.<sup>93</sup>

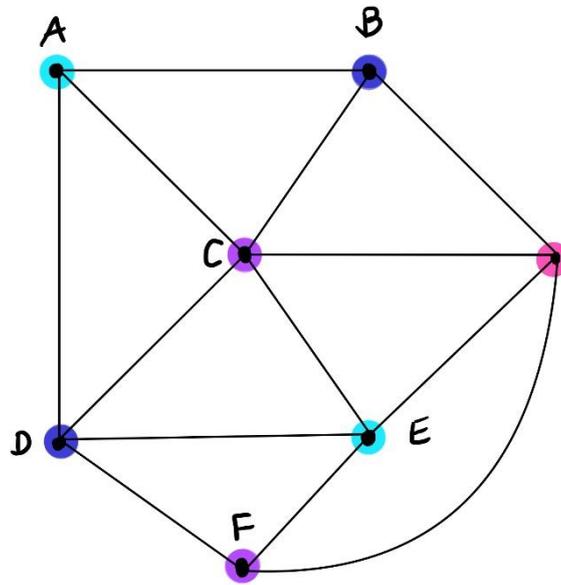


Abbildung 22 Der gefärbte Graph der Sendestationen

In der Realität gestaltet sich das Problem oft noch schwieriger, da Frequenzen in manchen Fällen Mindestabstände einhalten müssen. Trotzdem sind die Modellierung und Einfärbung von Graphen ein nützliches Hilfsmittel im Planen von Frequenzen für Funknetze.<sup>94</sup>

## 6.2 Anwendung in der Verkehrsplanung

Graphen eignen sich außerordentlich gut zur Modellierung von Straßennetzen und Routen. Oft ist es erwünscht, den kürzesten Weg zu einem Ziel oder eine ideale Rundtour zu finden. Um solche Probleme zu lösen, erstellt man zunächst eine Modellierung des Problems, indem man gewisse Städte oder Orte durch Knoten darstellt. Die Verkehrswege, die diese Orte verbinden, werden durch Kanten dargestellt. Mit dem entstandenen Graphen kann man eine optimale Route für seine Zwecke planen. Die Frage, eine möglichst kurze Route zu finden, ist unter dem Namen „Travelling Salesman Problem“ bekannt.<sup>95</sup>

Auch bei der Simulation und Optimierung von Verkehrsflüssen entsteht durch Abstrahierung ein Graph. Alle Kreuzungen eines Straßennetzes werden zu Knoten und die

<sup>93</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.88-89.

<sup>94</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.89.

<sup>95</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.175.

dazwischenliegenden Straßen werden zu Kanten.<sup>96</sup>

Beispielhaft soll ein sehr einfaches Problem vorgestellt werden, wie es in jedem Computernavigationssystem auftaucht.

Eine Person befindet sich in Vöcklamarkt in Oberösterreich und möchte auf schnellstem Weg mit den öffentlichen Verkehrsmitteln nach Graz gelangen. Dabei stehen drei Optionen zur Auswahl.

1. Option: Vöcklamarkt (VM) – Linz – Wien – Graz
2. Option: Vöcklamarkt (VM) – Linz – Selzthal – Graz
3. Option: Vöcklamarkt (VM) – Salzburg (SBG) – Selzthal – Graz

Diese drei Varianten kann man als Graph darstellen, wobei die Orte die Knoten des Graphen darstellen und entsprechende Verkehrswege als Kanten, siehe Abbildung 23. Die entsprechenden Fahrzeiten zwischen den verschiedenen Stationen sind zudem bekannt und sie werden den Kanten in der Abbildung 23 zugeordnet.

Vöcklamarkt (VM) – Linz: 50min	Linz – Selzthal: 1h 45min
Linz – Wien: 1h 20min	Selzthal – Graz: 1h 30min
Wien – Graz: 2h 40min	Vöcklamarkt (VM) – Salzburg (SBG): 50min
Salzburg (SBG) – Selzthal: 2h 20min	

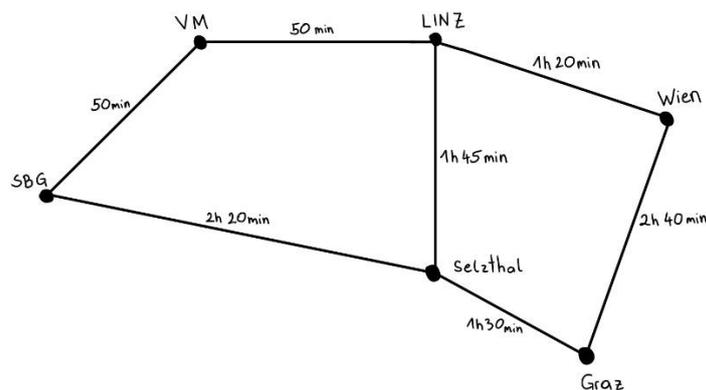


Abbildung 23 Die drei Optionen nach Graz zu gelangen

Bei diesem noch ziemlich übersichtlichen Beispiel kann man sich schnell die Fahrdauer der jeweiligen Optionen ausrechnen:

1. Option: 4h 50min

<sup>96</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.175.

2. Option: 4h 05min

3. Option: 4h 40min

Damit ist klar, dass sich die Person für die 2. Option entscheiden soll, um möglichst schnell nach Graz zu gelangen.

Das war ein anschauliches Beispiel. In der Realität sind solche Probleme um einiges komplexer. Es gibt zur Lösung solcher Probleme einen Algorithmus, benannt nach seinem Erfinder Dijkstra, dessen genauere Beschreibung jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.<sup>97</sup>

### 6.3 Anwendung in der Chemie

Die Struktur von Molekülen kann durch sogenannte Molekülgraphen dargestellt werden. Ein Beispiel ist dabei die Struktur von Alkanen, welche als Baum dargestellt werden können. Moleküle können trotz identer chemischer Zusammensetzung eine unterschiedliche Struktur haben. Diese verschiedenen Strukturen heißen Isomere. Forscher und Forscherinnen interessieren sich oft für die Anzahl der verschiedenen Isomere einer Verbindung, welche mit Hilfe eines Molekülgraphen ermittelt werden kann.<sup>98,99,100</sup>

In der folgenden Abbildung 24 ist das Alkan Pentan abgebildet. Es besteht aus 5 Kohlenstoffatomen C, an denen zwei oder drei Wasserstoffatome H hängen. Die C-Atome werden durch Knoten dargestellt, die von Kanten, also den Einfachbindungen, verbunden werden. In der Abbildung 25 sieht man alle möglichen Isomere von Pentan als Graphen dargestellt.

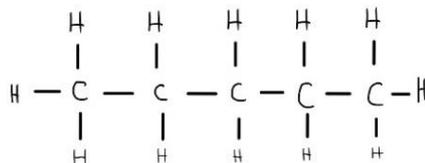


Abbildung 25 Das Alkan Pentan

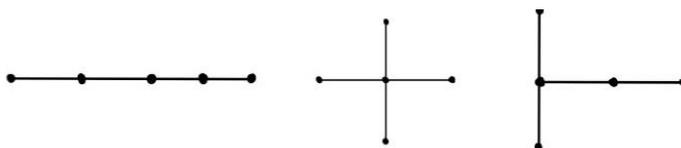


Abbildung 24 Das Alkan Pentan als Graph mit seinen Isomeren

<sup>97</sup> vgl. Mathematik macht Freu(n)de: AB-Dijkstra-Algorithmus. Universität Wien: 2020.

[https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user\\_upload/p\\_mathematikmachtfreunde/Materialien/AB-Dijkstra-Algorithmus-Ausarbeitung.pdf](https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Materialien/AB-Dijkstra-Algorithmus-Ausarbeitung.pdf) (Zugriff: 24.02.2023).

<sup>98</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.107.

<sup>99</sup> vgl. Beutelspacher/ Zschiegner, 2014, S.175-176.

<sup>100</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.116.

## 6.4 Weitere Anwendungsgebiete

In vielen weiteren Bereichen werden Graphen als Hilfsmittel verwendet. So dienen sie auch in der Physik als Abstrahierungen einer elektrischen Schaltung, wobei alle Widerstände, Transistoren und Spulen durch Knoten dargestellt werden, die durch Kanten verbunden sind. Wasser- und Gasleitungsnetze oder wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen können ebenso durch Graphen modelliert werden wie Datenbanken, Stammbäume oder hierarchische Systeme, um eine übersichtlichere Darstellung zu erhalten.<sup>101,102</sup>

---

<sup>101</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.12.

<sup>102</sup> vgl. Tittmann, 2022, S.107.

## 7. Fazit

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Graphentheorie ein vielfältiges Teilgebiet der Mathematik ist, welches in vielen Aspekten unseres Lebens eine versteckte, aber nicht zu unterschätzende, Rolle spielt.

Im Zuge dieser Arbeit wurde zuerst ein Graph definiert und anschließend wurden mathematische Eigenschaften von Graphen vorgestellt. Ein besonderer Fokus lag auf der Knotenfärbung von Graphen. Dabei wurde insbesondere der Sechs-Farben-Satz und der Fünf-Farben-Satz bewiesen und ein Ausblick auf den Vier-Farben-Satz gegeben.

Die Graphentheorie hat vielseitige Anwendungen, über die am Ende der Arbeit ein Überblick gegeben wurde.

Im Laufe der Arbeit wurde außerdem deutlich, dass der Computer eine immer wichtigere Rolle in der Mathematik spielt. Einerseits im Rahmen von Beweisen von Sätzen, wie es beim Vier-Farben-Satz der Fall ist, und andererseits beim algorithmischen Lösen von komplexen Problemen.

Neben den vielen Aspekten der Anwendung ist die Graphentheorie auch für sich eine hochinteressante Teildisziplin der Mathematik mit vielen faszinierenden Resultaten.

## Abbildungsverzeichnis 1

Abbildung 1 Ein Stadtplan von Königsberg.....	5
Abbildung 2 Leonhard Euler (1707-1783).....	5
Abbildung 3 Übersichtlicherer Graph der Problemstellung.....	6
Abbildung 4 Beispielgraph.....	8
Abbildung 5 Die vollständigen Graphen $K_1$ bis $K_6$ .....	9
Abbildung 6 Ein Weg $P_7$ .....	10
Abbildung 7 Zwei Kreise $C_8$ .....	10
Abbildung 8 Drei Bäume $T_5$ .....	11
Abbildung 9 Beispiel für einen planaren Graphen.....	12
Abbildung 10 Beispielgraph Österreich 1.....	18
Abbildung 11 Beispielgraph Österreich 2.....	18
Abbildung 12 Ein zulässig gefärbter $K_6$ .....	19
Abbildung 13 Ein zulässig gefärbter $T_6$ .....	20
Abbildung 14 Ein zulässig gefärbter $C_{18}$ .....	20
Abbildung 15 Ein zulässig gefärbter $C_{19}$ .....	21
Abbildung 16 Der Knoten $v$ mit seinen fünf gefärbten Nachbarknoten $v_1, v_2, v_3, v_4$ und $v_5$ .....	24
Abbildung 17 Alle Wege in den Farben 1 und 3, die in $G'$ vom Knoten $v_1$ ausgehen.....	24
Abbildung 18 Es existiert ein im Fall b beschriebener Weg zwischen $v_1$ und $v_3$ .....	25
Abbildung 19 In $G'$ ist kein Weg von $v_2$ nach $v_4$ möglich.....	26
Abbildung 20 Bereiche der Sendestationen A, B, C, D, E, F und G.....	29
Abbildung 21 Der Graph der Sendestationen.....	29
Abbildung 22 Der gefärbte Graph der Sendestationen.....	30
Abbildung 23 Die drei Optionen nach Graz zu gelangen.....	31
Abbildung 24 Das Alkan Pentan.....	32
Abbildung 25 Das Alkan Pentan als Graph mit seinen Isomeren.....	32

## Abbildungsverzeichnis 2

Abbildung 1:

Koenigsberg 1809: <https://alda.iwr.uni-heidelberg.de/images/Koenigsberg1809.png>

(Zugriff: 23.02.2023) mit Einzeichnungen der Verfasserin.

Abbildung 2:

ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv/ Fotograf: Unbekannt/ TAPE\_D378-05-DIA/ Public Domain Mark.

<https://ba.e-pics.ethz.ch/catalog/ETHBIB.Bildarchiv/r/235786> (Zugriff: 28.02.2023)

Die Abbildungen 3 bis 25 wurden von der Verfasserin angefertigt.

## Literaturverzeichnis

Aigner, Martin: Graphentheorie. Eine Einführung aus dem 4-Farben Problem. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015.

Baptist, Peter/ Beutelspacher, Albrecht: Ein Spaziergang mit Herrn Euler. In: Baptist, Peter: Alles ist Zahl. 2. Auflage. Köln: Kölner Universitätsverlag, 2009.

Beutelspacher, Albrecht/ Zschiegner, Marc-Alexander: Diskrete Mathematik für Einsteiger. 5. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2014.

Mathematik macht Freu(n)de: AB-Dijkstra-Algorithmus. Universität Wien: 2020.  
[https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user\\_upload/p\\_mathematikmachtfreunde/Materialien/AB-Dijkstra-Algorithmus-Ausarbeitung.pdf](https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Materialien/AB-Dijkstra-Algorithmus-Ausarbeitung.pdf) (Zugriff: 24.02.2023)

Matoušek, Jiří/ Nešetřil, Jaroslav: Diskrete Mathematik. Eine Entdeckungsreise. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2002.

Robertson, Neil/ Sanders, Daniel P./ Seymour, Paul/ Thomas, Robin: Efficiently four-coloring planar graphs. In : Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Philadelphia, PA, 1996). ACM, New York, 1996.

Taraz, Anusch: Diskrete Mathematik. Grundlagen und Methoden. Mathematik Kompakt. Basel: Birkhäuser/ Springer, 2012.

Tittmann, Peter: Graphentheorie. Eine anwendungsorientierte Einführung. 4. Auflage. München: Carl Hanser Verlag, 2022.