Zahlen im Reich der Töne – Die Wissenschaft hinter dem schönen Klang
oder
Was hat Musik eigentlich mit Mathematik zu tun?

Komplexe Leistung
im Fach Mathematik

am

„Glückauf"-Gymnasium
Dippoldiswalde/Altenberg

Vorgelegt von: Marlene Riedl, Klasse 10d
Rabenau, OT Oelsa
Bergstraße 5
01734 Rabenau

Abgabetermin: 05.02.2020

Betreuer: Frau Maczewsky

Vorwort

„Mathematik ist Musik des Geistes, Musik ist Mathematik der Seele"[1],
Daniil Charms (1905 - 1942)

Viele Menschen sind der Meinung, Mathematik und Musik seien zwei völlig unterschiedliche Bereiche. Mathematik sei reine Theorie und außerdem langweilig und unkreativ. Musik hingegen sei eine kreative Ausdrucksweise, welche die Gefühle des Menschen wie auf magische Weise beeinflussen kann – und damit das komplette Gegenteil von Mathematik. Der US-amerikanische Musiker Marylin Manson beschreibt sie sogar als „[…] die stärkste Form der Magie."[2]
Dass sehr wohl ein Zusammenhang zwischen Mathematik und Musik besteht, zeigt das Zitat des russischen Schriftstellers Daniil Charms. Ihm zufolge sei mathematisches Denken eine Art Musik für den menschlichen Verstand, Musik eine Form der Mathematik, die die Gefühlswelt beeinflusst. Auch schon vor ihm haben sich Menschen mit dieser Thematik auseinandergesetzt. Der griechische Philosoph und Mathematiker Pythagoras (um 570 v.Chr.) gilt als Begründer der musikalischen Harmonielehre und schrieb seine Erkenntnisse in seiner „Lehre von der Harmonie der Sphären"[3] nieder. Auch die berühmten deutschen Musiker und Komponisten Johann Sebastian Bach und Wolfgang Amadeus Mozart haben bereits die musikalisch-mathematische Verbindung erkannt. Bach bediente sich wie viele Barockmusiker dem Zahlenalphabet, in welchem die Buchstaben von 1-26 durchnummeriert sind. Die Summe der Buchstaben seines Namens (B+A+C+H) beträgt folglich 14. Diese Zahl gilt als „Bachzahl"[4], weil sie in vielen seiner Kompositionen wiederzufinden ist: Seine „Goldberg-Variationen" bestehen aus 14 Kanons, die „Kunst der Fuge" aus 14 Fugen. Musikwissenschaftler sind sich einig, dass es sich dabei nicht um einen Zufall handeln kann.
Der Wiener Klassiker Mozart komponierte mit seiner „Anleitung so viel Walzer oder Schleifer mit zwei Würfeln zu componiren so viel man will ohne musikalisch zu seyn noch etwas von der Composition zu verstehen" (ca. 1787, KV Anhang 294d)[5] ein musikalisches Würfelspiel. Dabei muss der Spieler 16 Mal hintereinander würfeln, wodurch nach bestimmten Regeln 16 Takte ausgewählt werden, die aneinandergereiht einen Walzer ergeben. Es gibt insgesamt 129 Quadrilliarden Möglichkeiten für verschiedene Musikstücke![6]

Schon anhand dieser Beispiele wird die Vielfältigkeit an Verbindungen zwischen den beiden scheinbar völlig unterschiedlichen Wissenschaften deutlich. Von den Zahlenverhältnissen der Frequenzen über das Gesetz des Wohlklangs bis hin zu den verschiedenen Stimmungen und der Fourier-Analyse lässt sich überall ein Zusammenhang zwischen Mathematik und Musik erkennen. Der Frage, wie viel Mathematik wirklich in der Musik steckt und in welchen Formen sie sich äußert, widmet sich diese Komplexe Leistung.

[1] http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/zitate.html (25.10.2019)
[2] https://www.rogersandega.lima-city.de/musik-zitate.html (25.10.2019)
[3] https://radio-kreta.de/pythagoras-ohne-mathematik-gabe-es-keine-musik/ (26.10.2019)
[4] http://www.buchstabenschubser.de/arbeiten/bachhaus-eisenach_bach-14/ (26.10.2019)
[5] Librero 2019 – Die Mathematik der Musik, S. 134ff.
[6] https://mug.didaktik-graz.at/Files/Mathematikum/Mozart.pdf (16.10.2019)

Inhaltsverzeichnis

1 Abkürzungsverzeichnis

KV – Köchelverzeichnis (Werkverzeichnis der Kompositionen Wolfgang Amadeus Mozarts)[7]

dB – Dezibel (Einheit der Frequenz)

Hz – Hertz (Einheit der Frequenz), 1 Hz = 1/s (Periodendauer einer Schallwelle)

kl./gr. – klein/groß (Form des Intervalls nach Anzahl umfasster Halbtöne, in 4.1)

Cent – Maßeinheit der Tonhöhe zum genaueren Vergleich musikalischer Intervalle[8], (Erhöhung des „a" um 1 Cent: $440\ Hz \cdot 2^{\frac{1}{1200}} \approx 440{,}254$ Hz)

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6chelverzeichnis (26.10.2019)
[8] https://de.wikipedia.org/wiki/Cent_(Musik) (26.12.2019)

2 Einleitung

Musik spielt im Leben der Verfasserin seit ihrer frühsten Kindheit eine bedeutende Rolle. So verbringt sie seit ihrem fünften Lebensjahr einen Großteil ihrer Zeit mit dem Violinspiel. Im Grundschulalter kam dann die Begeisterung für die Mathematik hinzu. Als sie während ihres Praktikums im Mai 2019 an der Technischen Universität Dresden unter dem Thema *„Mathematik, Musik und schwingende Seiten"* von Zusammenhängen zwischen diesen beiden Wissenschaften erfuhr, faszinierte sie das sehr und inspirierte sie zu dieser Arbeit.

Die Verbindungen zwischen Mathematik und Musik sind vielfältig. In der vorliegenden Arbeit betrachtet die Verfasserin mathematische Hintergründe der Musik und wird zunächst auf Grundlagen der Musiktheorie sowohl im rhythmischen als auch im tonalen Bereich eingehen. Dabei werden im Bereich der Rhythmik Taktarten und Notenwerte angesprochen, welche auf einfacher Bruchrechnung aufbauen. Parameter kennen die meisten Menschen aus mathematischen Funktionen. Dass sie auch im Zusammenhang mit Tönen stehen können, wird im Folgenden gezeigt.

Daraufhin begeben wir uns von einzelnen Tönen in die Ebene mehrerer gleichzeitig und nacheinander erklingender Töne, auch als Intervalle bezeichnet. Die Verfasserin erläutert deren Zusammenhang mit linearem und exponentiellem Wachstum und erforscht mithilfe von Boomwhackers, wie Intervalle mit Längenverhältnissen beschrieben werden können. Der Frage, weshalb einige Töne besser zusammen klingen, als andere, wird die Verfasserin ebenfalls untersuchen und dabei zwei verschiedene Möglichkeiten nutzen, die Phänomene Konsonanz und Dissonanz mathematisch zu erklären.

Verstimmte Instrumente können in unseren Ohren wirklich schrecklich klingen. Im Laufe der Geschichte hat es viele Versuche gegeben, die Stimmung zu optimieren, indem „Probleme" früherer Stimmungssysteme behoben wurden, jedoch gleichzeitig neue entstanden. Diesen scheinbar nie endenden Optimierungen der Stimmungssysteme widmet sich die Verfasserin im Anschluss. In diesem Kapitel gibt es weiterhin Antworten auf die Frage, wo es in der Musik Wölfe und Kommas gibt. Um ihre theoretischen Ausführungen zu den verschiedenen Stimmungssystemen praktisch zu veranschaulichen, hängt die Verfasserin ein Python-Programm, das infolge des besagten Praktikums an der TU Dresden entstanden ist an, welches es ermöglicht, eine Kadenz in verschiedenen Stimmungen abspielen zu lassen.

Ein wesentlicher, nicht zu vernachlässigender Faktor, welcher die Musik ausmacht, ist die Klangfarbe. Das Geheimnis ihres Ursprungs liegt in den Obertönen, die im letzten Kapitel dieser Arbeit betrachtet werden. Mithilfe der Fourier-Analyse wird das „Klangmuster" eines Klaviers untersucht. Zum Schluss werden zur Reflexion und abschließenden Beantwortung der Leitfrage, in welchen Formen sich die Mathematik in der Musik äußert, die wichtigsten Erkenntnisse der Arbeit in einem Fazit zusammengefasst.

3 Grundlagen

3.1 Rhythmus, Takt und Notenwerte

Schon in den Grundlagen der Musiktheorie spielt die Mathematik in Form einfacher Bruchrechnung eine wichtige Rolle.
Der Rhythmus ist ein Grundelement für die musikalische Gestaltung und baut auf Takte als Grundmuster jedes Musikstücks auf. Die Takte setzen sich aus Gruppen von Grundschlägen zusammen, welche je nach Taktart variieren. Diese gleichmäßigen Pulsschläge kann man mit dem Ticken einer Uhr vergleichen.[9] Ein Walzer steht beispielsweise im ¾ Takt, welcher aus drei Grundschlägen besteht, wobei ein Grundschlag einer Viertelnote entspricht. Man unterscheidet zwischen geraden Taktarten (z.B. mit zwei oder vier Viertelnoten pro Takt), welche aus zwei „Teilen“ bestehen, weshalb die Betonung auf dem 1. und 3. Ton liegt und ungeraden Taktarten (z.B. 3/4 oder 3/8-Takt) mit Betonung auf dem ersten Ton. Es gibt jedoch auch noch andere (ungerade) Taktarten, wie den 6/8-Takt, welcher aus zwei 3-er Gruppen besteht, weshalb die Betonung auf dem 1. und 4. Ton liegt oder den 5/4 bzw. 7/4-Takt, welche dann bezüglich der Betonung in 2-er und 3-er Gruppen aufgeteilt werden.[10]
Ein Takt besteht jedoch nicht nur aus Viertel- und Achtelnoten. In der Musik gibt es ein System von relativen Zeiteinheiten, wobei das Wort „relativ“ bedeutet, dass es auf das Grundtempo ankommt. Das Tempo eines Musikstücks wird in der Form „Notenwerte pro Zeiteinheit in min“ (wobei der Notenwert meist der Viertelnote entspricht) ausgedrückt. Die Tempoangabe ♩=90 bedeutet demnach, dass in einer Minute 90 Viertelnoten gespielt werden.
Im Folgenden wird der 4/4- Takt als „Normalfall“ betrachtet, da die Bezeichnungen der Notenwerte nach ihm ausgerichtet sind. Eine Viertelnote entspricht einem Grundschlag und damit ¼ des Taktes. Eine ganze Note füllt vier Schläge und damit einen ganzen Takt aus, eine halbe Note zwei Schläge und einen halben Takt. Eine Achtelnote entspricht einem halben Grundschlag (1/8 des Taktes), eine 16tel-Note dem Viertel eines Grundschlags (1/16 des Taktes) usw. (siehe Grafik[11]). Werden Noten mit einem Punkt versehen, addiert man zu ihrem Notenwert nochmal die Hälfte ihres Wertes hinzu. Die Triole  als Besonderheit hat den jeweils nächsthöheren Notenwert (z.B. Die Achteltriole ist so lang wie eine Viertel.)

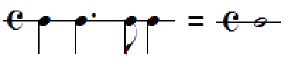
An dieser Stelle lässt sich besonders gut ein Bezug zur Mathematik herstellen:

Abb. 1: Übersicht über die Notenwerte

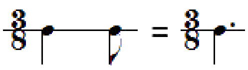
Um einen Takt zu füllen, addiert man die verschiedenen Notenwerte. Dabei muss man bei einem 4/4-Takt beispielsweise immer auf 1, bei einem ¾ Takt auf 0,75 kommen.

Rechenbeispiele:[12]

4/4-Takt: 1/4 + 3/8 + 1/8 + 1/4 = 1



3/8-Takt: 1/4 + 1/8 = 0,375



[9] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/musik/artikel/rhythmus (02.11.2019)
[10] https://www.theorie-musik.de/grundlagen/taktarten/ (02.11.2019)
[11] https://www.meyer-gitarre.de/musiklehre/rhythmus/notenwerte/index.html (02.11.2019)
[12] https://www.theorie-musik.de/grundlagen/mit-noten-notenwerten-rechnen/ (02.11.2019)

3.2 Parameter in der Musik – Lautstärke und Tonhöhe

Nicht nur in den Naturwissenschaften gibt es Parameter. Auch in der Musik sind sie für die Beschreibung elementarer Aspekte wie Tonhöhe oder Lautstärke von großer Bedeutung.

„Der Ausdruck selbst entstammt der Mathematik; er musste sich […] einen Bedeutungswandel gefallen lassen. Jetzt, in der Musik, nennt man Parameter alle Dimensionen des musikalischen Verlaufs, die sich isoliert verändern lassen"[13] (Dibelius, 1988, S.337f.).

Während der Parameter in der Mathematik eine variable Größe in Gleichungen oder Funktionen ist, beschreibt er in der Musik Gestaltungsmittel, welche die musikalische Wahrnehmung in einer bestimmten Dimension (z.B. Tondauer: Zeit) beeinflussen. Diese Tatsache drückt der deutsche Musikpublizist Ulrich Dibelius (1942 – 2008) als Bedeutungswechsel aus. Mit „isoliert verändern" meint der Autor, dass ein Ton beispielsweise lauter oder leiser gespielt werden kann, ohne dass sich die Tonhöhe dadurch ändert. In beiden Wissenschaften nimmt der Parameter Einfluss auf das „Ergebnis" – in der Mathematik beispielsweise ein Funktionsgraph, in der Musik der resultierende Ton. In der Musik gibt es neben den primären Parametern wie Lautstärke, Tonhöhe oder Tondauer auch sekundäre Parameter (z.B. Klangfarbe)[14], welche später noch genauer betrachtet werden.

Töne sind Schwingungen. Die Auswirkungen der Parameter Tonhöhe und Lautstärke auf den Ton werden besonders gut deutlich, wenn man ihn als Sinuskurve darstellt[15]:

Die **Lautstärke** hängt von der Amplitude der Schwingung bzw. der Größe der Druckschwankungen, die der Schall verursacht, ab. Je größer die Amplitude der Sinuskurve ist, desto lauter ist der Ton (s. Grafik).

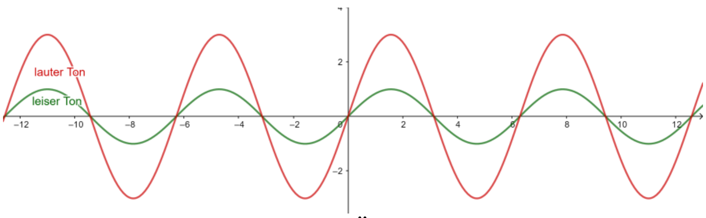


Abb. 2: Sinuskurve: Änderung der Lautstärke

Die Einheit der Lautstärke ist Dezibel (dB), wobei leise Musik in etwa 40dB entspricht, ein Orchester im forte ca. 90dB und ein Rockkonzert sogar 110dB erreicht. In Musikstücken wird die Lautstärke mit bestimmten Zeichen und Begriffen beschrieben: Die Spannweite reicht von piano pianissimo (ppp: sehr leise) über Zwischenstufen wie mezzoforte (mf: mittellaut) bis zum forte fortissimo (fff: sehr laut). Crescendo (<) heißt lauter, decrescendo (>) leiser werden.

Die Frequenz eines Tones bzw. die Schnelligkeit der Druckschwankungen bestimmt die **Tonhöhe**. Die Frequenz in Hertz (Hz) gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an. Menschen können im Durchschnitt Frequenzen zwischen 20Hz (tiefster Ton) und 20.000Hz wahrnehmen. Hohe Töne haben eine hohe Frequenz, wobei die Sinuskurve eine kleine Periodenlänge aufweist und in Richtung der x-Achse gestaucht ist. Bei tiefen Tönen ist es genau umgekehrt und der Graph ist gestreckt.

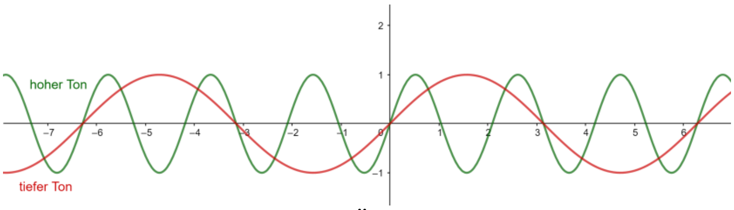


Abb. 3: Sinuskurve: Änderung der Tonhöhe

Wie wir sehen haben die Parameter Lautstärke und Tonhöhe einen entscheidenden Einfluss auf den Verlauf der Sinuskurve eines Tones (=Schwingung).

[13] Piper 1988 – Moderne Musik I., 4. Auflage, S. 337f.
[14] https://worlds-of-music.de/WOM.php?idex=2410 (24.11.2019)
[15] Sinusplots erstellt mit GeoGebra Classic

4 Intervalle

4.1 Zusammenhang mit Wachstum

Intervalle bezeichnen den Abstand zwischen zwei nacheinander oder gleichzeitig erklingenden Tönen und gehören zu den Grundlagen der Musiktheorie. Tonleitern, Akkorde sowie jedes erdenkliche Musikstück bauen auf Intervallen auf. In zwei verschiedenen Herangehensweisen, ein Intervall zu bestimmen wird ein interessanter Bezug zur Mathematik beziehungsweise linearem und exponentiellem Wachstum ersichtlich[16]:
Angenommen, wir bestimmen ein Intervall, indem wir die Tasten eines Klaviers zählen. Wir nummerieren die Tasten von a^0 bis c^8 beginnend mit 1. und sehen, dass „a“-Tasten die Nummern 1, 8, 15, 22, 29 etc. tragen. Von einem a zum nächsten bewegen wir uns um genau sieben Tasten, das Wachstum ist linear mit $a(n) = 1 + 7 \cdot n$. Wenn wir anstelle der Tasten die Frequenzen der Töne betrachten, ist das Wachstum nicht linear, sondern exponentiell: Die Frequenz von a^0 beträgt 27,5Hz. Multiplizieren wir diesen Wert mit 2 erhalten wir mit 55Hz die Frequenz des nächsten a. Die darauffolgenden a sind mit 110Hz, 220Hz und 440Hz gestimmt. Die Frequenz eines a können wir demnach mit der Gleichung $a(n) = 27{,}5Hz \cdot 2^n$ bestimmen, wobei „n“ die Nummer des jeweiligen a ist (z.B. n(a^1) = 1).

4.2 Längenverhältnisse und Intervalle

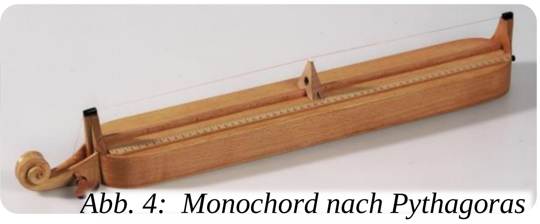


Abb. 4: Monochord nach Pythagoras

Der Name eines Intervalls ist von der Anzahl der umfassten Töne abhängig. Das kleinste Intervall, die Prime umfasst nur einen Ton. Die Sekunde gibt den Abstand zwischen zwei Tönen an, wobei die kleine Sekunde einen und die große Sekunde zwei Halbtöne umfasst. Die anderen Intervalle heißen kl./gr. Terz (1.-3.Ton), Quarte, Quinte, kl./gr. Sexte, kl./gr. Septime und Oktave (1.-8. Ton).[17]
Jedes Intervall wird durch ein Verhältnis zweier Längen bestimmt: Bei Saiteninstrumenten die durch den Finger abgetrennten Abschnitte der Saite, bei Blasinstrumenten das Luftvolumen, welches durch Ventile oder Ähnliches abgetrennt wird. Pythagoras hat sich den Intervallen mit einem Monochord (= länglicher Resonanzkasten, über den eine Saite gespannt ist) genähert (obere Grafik[18]). Die Verfasserin verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Längenverhältnissen und Intervallen mithilfe von Boomwhackers, bei denen durch Schlagen auf die flache Hand ein bestimmter Ton entsteht, indem sie zwei Rohre ausmisst und das Längenverhältnis berechnet.

Tabelle 1: Längenverhältnisse von Boomwhackers

Intervall	Länge Rohr 1	Länge Rohr 2	Längenverhältnis
Oktave	62,7cm	30,2cm	~2:1
Quinte	62,7cm	40,9cm	~3:2
Quarte	62,7cm	46,3cm	~4:3
große Terz	62,7cm	49,3cm	~5:4
kleine Terz	55,5cm	46,3cm	~6:5


Abb. 5: Boomwhackers

Wie wir sehen, steigt die Differenz der Rohrlängen mit zunehmendem Abstand zwischen den jeweils zugehörigen Tönen. Jedes Intervall hat ein typisches Längenverhältnis. Für eine Oktave muss ein Rohr doppelt so lang sein wie das andere, für eine Quarte ein Viertel länger.

16 Vgl. Librero 2019 – Die Mathematik der Musik, S.17
17 http://musikanalyse.net/tutorials/intervalle-bestimmen/ (11.12.2019)
18 https://www.pinterest.de/pin/786300416163830080/?lp=true (11.12.2019)

Weiterhin können Intervalle nach dem zeitlichen Auftreten der Töne klassifiziert werden. Erklingen die beiden Töne gleichzeitig, spricht man von einem harmonischen Intervall, erklingen sie nacheinander, handelt es sich um ein melodisches Intervall.[19]

4.3 Das Gesetz des Wohlklangs

Warum klingen einige Töne zusammen besser als andere? Wieso empfinden wir die Quinte als sehr wohlklingend, die kleine Sekunde jedoch als schräg?
In der Musik werden angenehm klingende Zweiklänge als konsonant und Töne, die nicht miteinander harmonieren, als dissonant bezeichnet. Schon die Pythagoreer haben versucht, diese Phänomene mathematisch zu erklären und sind zu dem Schluss gekommen, dass der Grad der Konsonanz mit der Proportionalität der Seitenlängen und somit der Frequenzen zusammenhängt. Intervalle sind umso konsonanter, je einfacher das Zahlenverhältnis ihrer Frequenzen ist. Demzufolge sind die Oktave (f1/f2 = 2:1), die Quinte (3:2), und die Quarte (4:3) sehr konsonant, Intervalle mit höheren Frequenz-verhältnissen dissonant. Beispiele für einen sehr dissonanten Zweiklang sind die kleine Sekunde (15:16) oder der Tritonus (umfasst drei Ganztöne, Intervall zwischen Quarte und Quinte) mit dem Frequenzverhältnis 45:32.

Tabelle 2: Ordnung der Intervalle nach Konsonanzwert[20]

Intervall	*Frequenzverhältnis*	*Klangempfinden*
Oktave	2:1	sehr konsonant
Quinte	3:2	sehr konsonant
Quarte	4:3	sehr konsonant
kl./gr. Terz	6:5/ 5:4	konsonant
kl./gr. Sexte	8:5/ 5:3	konsonant
große Sekunde	9:8	dissonant
kl./gr. Septime	16:9/ 15:8	dissonant
kleine Sekunde	16:15	sehr dissonant
Tritonus	45:32	sehr dissonant

Ludwig van Beethoven war einer der bedeutendsten deutschen Komponisten der Wiener Klassik. Doch ein Merkmal unterschied ihn von anderen Musikern: Nach jahrelanger Schwerhörigkeit beginnend im Alter von 27 Jahren, wurde er schließlich mit 48 Jahren komplett taub.[21] Und trotzdem war es ihm möglich sehr komplexe Musikstücke zu schreiben, obwohl er diese selbst nicht hören konnte. Das Geheimnis steckt in den mathematischen Mustern, welche in der Musik verborgen sind. In seiner Mondscheinsonate, welche aus einem langsamen Fluss von Triolen besteht, verwendet Beethoven Dreiklänge in einem ständigen Wechsel von Konsonanz und Dissonanz. Werden die Töne des ersten Dreiklangs (A, Fis und D) bzw. deren Frequenzen als Sinuskurven dargestellt, wird ersichtlich, dass sie sich schon nach 0,042 sec. wieder überschneiden (siehe Grafik[22]), wobei das D in diesem Bereich zwei, das Fis zweieinhalb und das A drei Perioden durchläuft. Dieses Muster klingt für uns angenehm (konsonant). Ebenso bezaubernd wirken die Dissonanzen: die Takte 52 – 54 enthalten beispielsweise Triolen mit B und C, deren Schallwellen sehr asynchron sind und die Sinuskurven selten auf der x-Achse zusammentreffen. An diesem Beispiel wird deutlich, dass Akkorde umso konsonanter sind, je weniger Zeit die Kurven benötigen, bis sie sich wieder auf der x-Achse treffen.

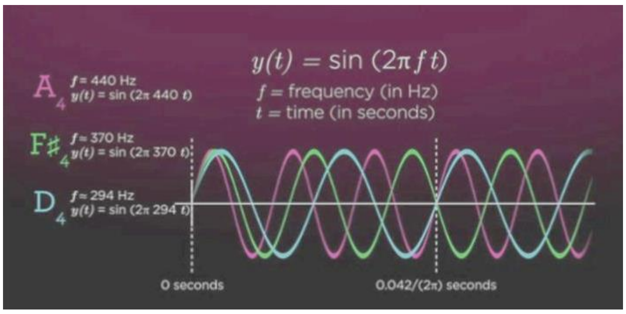


Abb. 6: Sinuskurven eines konsonanten Dreiklangs

[19] https://www.mu-sig.de/Theorie/Intervalle/intervall1.htm (17.12.2019)
[20] http://www.brefeld.homepage.t-online.de/konsonanz.html (20.12.2019)
[21] https://www.dw.com/de/10-dinge-die-sie-%C3%BCber-beethoven-wissen-sollten/a-18685203 (20.12.2019)
[22] https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY (20.12.2019)

Auch hier wird eine enge Verbindung zur Mathematik ersichtlich. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, sich den Phänomenen Konsonanz und Dissonanz mathematisch zu nähern: Zum einen, indem die Zahlenverhältnisse der Frequenzen beziehungsweise deren Komplexität betrachtet werden und andererseits, indem die den Schallwellen zugehörigen Sinuskurven gezeichnet werden und der Verlauf der Graphen zueinander untersucht wird (Schnittpunkte).

5 Stimmungen

5.1 Problem der Frequenzverteilung

Die beiden Töne mit den Frequenzen 440Hz und 880Hz bilden eine Oktave. Eine Oktave umfasst sieben Ganzton- und zwölf Halbtonschritte. Es sind beispielsweise zwölf Halbtonschritte nötig um von einem „c“ zum nächsten zu gelangen (siehe Grafik[23]). Eine Tonleiter besteht immer aus fünf Ganztönen und zwei Halbtönen. Nun stellt sich die Frage, welche Frequenzen die Töne einer Tonleiter (bei A-Dur zwischen 440Hz und 880Hz) besitzen. Auf Grundlage dieses Problems sind verschiedene Stimmungen als Lösungsansätze entstanden. Im Folgenden wird eine C-Dur Tonleiter betrachtet, die Frequenz des Anfangstones mit 1f bezeichnet und das Frequenzverhältnis zu den darauffolgenden Tönen berechnet. Die Frequenzen dieser Töne werden bestimmt, indem man das Verhältnis mit der Frequenz des ersten Tones multipliziert.

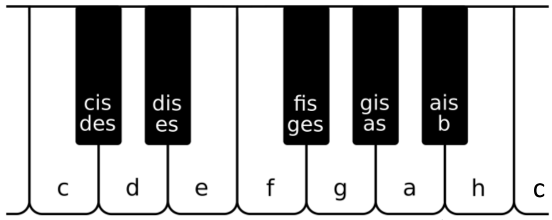


Abb. 7: Klaviatur: eine Oktave von c^1 bis c^2

5.2 Pythagoreische Stimmung

Pythagoras von Samos hat Quinten als Grundlage für seine Stimmung verwendet.

„Die Pythagoreer erhielten die verschiedenen Töne der Tonleiter, indem sie Quinten verketteten und dann eine „Reduzierung auf die Oktave“ durchführten, (...)“[24] (Arbonés und Milrud, 2019, S.20).

Für die Verkettung der Quinten wird der Quintenzirkel[25] betrachtet:
Der Abstand jedes Tones zu dem links benachbarten Ton beträgt genau eine Quinte. Um diese Töne innerhalb einer Oktave auf derselben Tonleiter anordnen zu können, müssen wir sie auf die Oktave reduzieren, sodass der Wert der relativen Frequenzen zwischen 1f (c^1/c^1) und 2f (c^2/c^1) liegt. Mit dieser Anleitung werden nun schrittweise die Frequenzverhältnisse aller Töne einer C-Dur Tonleiter zum Anfangston berechnet.

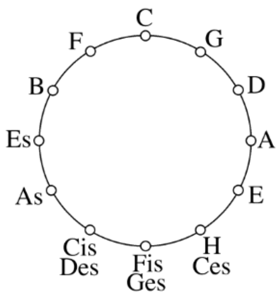


Abb. 8: Quintenzirkel

1. F (eine Quarte von C entfernt) = 4/3
2. G (eine Quinte von C entfernt) = 3/2
3. D (eine Quinte von G entfernt, aber eine Oktave höher) = $G \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$
4. A= $D \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$; E= $A \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64}$; H= $E \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$

Noten	C	D	E	F	G	A	H	C
Frequenzverhältnis	1f	$\frac{9}{8}$ f	$\frac{81}{64}$ f	$\frac{4}{3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{27}{16}$ f	$\frac{243}{128}$ f	2f

9/8 9/8 256/243 9/8 9/8 9/8 256/243
Halbtonschritte

[23] https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Klaviatur_(Tasten).svg (22.12.2019)
[24] Librero 2019 – Die Mathematik der Musik, S. 20
[25] https://www.mu-sig.de/Theorie/Quintenzirkel/quintenzirkel.htm (23.12.2019)

5.3 Peter und der Wolf oder: Pythagoras und die Wolfsquinte

Die Wolfsquinte beschreibt ein bekanntes temperiertes Problem, welches sich aus der pythagoreischen Stimmung ergibt. Pythagoras arbeitete bei seiner Stimmung mit nur einem Intervall, indem er Quinten übereinanderschichtete. Theoretisch müssten wir durch das Übereinanderschichten von zwölf reinen Quinten (12 mal 7 Halbtöne) auf den gleichen Ton kommen, wie wenn man sieben Oktaven nach oben geht (7 mal 12 Halbtöne). Tatsächlich ist dieser Ton (his) jedoch um 23,46 Cent (ca. ein Achtelton) höher als die entsprechende Oktave des Grundtons (c). Diese Ungenauigkeit wird als pythagoreisches Komma bezeichnet. Weil Tasteninstrumente jedoch keine extra Taste für den Ton „his“ besitzen, wird die letzte der zwölf Quinten um den Wert des pythagoreischen Kommas vermindert. Diese Quinte klingt ziemlich schräg, wodurch sie auch ihren Namen erhielt („Die Quinte heult wie ein Wolf!“[26]).

5.4 Weitere Stimmungssysteme

5.4.1 Neue Stimmungen, neue Probleme

Im Laufe der (Musik-)geschichte gab es verschiedene Versuche, Probleme wie die Wolfsquinte zu lösen und mit neuen Stimmungssystemen die Reinheit bestimmter Intervalle zu erhöhen, jedoch traten immer wieder Disharmonien auf. Eine Stimmung, die in allen Tonarten zugleich rein ist, gibt es nicht. Es müssen immer Kompromisse eingegangen werden. Im Folgenden stellt die Verfasserin einige Stimmungssysteme kurz vor.

5.4.2 Die reine Stimmung und ein weiteres Komma

Bei der reinen Stimmung wurden neben den Oktaven und den Quinten auch die großen Terzen rein gestimmt. Da sich jedoch die rein gestimmten Intervalle gegenseitig ausschließen, gibt es auch hier einige Probleme. Drei aufeinandergestapelte große Terzen ergeben beispielsweise keine reine Oktave, da $\left(\frac{5}{4}\right)^3 \approx 1{,}953$ anstatt 2. Geht man zunächst vier reine Quinten hoch und dann wieder zwei Oktaven zurück, erhält man eine übergroße Terz mit dem Frequenzverhältnis 81:64, welche als Ditonus bezeichnet wird. Sie unterscheidet sich um 21,5 Cent von der pythagoreischen Terz und verhält sich zu dieser wie $\frac{81}{64} / \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$. Dieser Abstand wird als syntonisches Komma bezeichnet.

5.4.3 Mitteltönige und wohltemperierte Stimmungen vierteln Kommas

Mitteltönige Stimmungen, die in der Renaissance und im Barock vorrangig für Tasteninstrumente gebräuchlich waren[27] sowie die wohltemperierte Stimmung unterscheiden sich zur pythagoreischen und zur reinen Stimmung darin, dass die Quinten etwas „kleiner“ also unrein temperiert werden mit dem Ziel, das syntonische bzw. pythagoreische Komma auszugleichen. Bei den mitteltönigen Stimmungen werden vier Quinten um ¼ des syntonischen Kommas verengt, weshalb die mitteltönige Quinte anstelle von 3:2 einen Wert von $\frac{3}{2} / \sqrt[4]{\frac{81}{80}} \approx 1{,}495$ hat. Die übrigen Quinten sind rein. Ähnlich verhält es sich mit der wohltemperierten Stimmung, bei der vier Quinten um ¼ des pythagoreischen Kommas verkleinert werden und ein Teilungsverhältnis von $\frac{3}{2} / \sqrt[4]{\frac{531441}{524288}} \approx 1{,}4949$ aufweisen.

[26] http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Wolfsquinte.html (26.12.2019)
[27] https://de.wikipedia.org/wiki/Mittelt%C3%B6nige_Stimmung (26.12.2019)

5.5 Gleichstufige Stimmung – Die Lösung aller Probleme?

Die heute am weitesten verbreitete Stimmung ist die gleichstufige Stimmung, eine Variante der wohltemperierten Stimmung. Bei dieser Stimmung werden nicht nur vier Quinten vermindert, sondern sämtliche zwölf Quinten um jeweils ein Zwölftel des pythagoreischen Kommas verengt. Dafür wird die Oktave in zwölf gleiche Teile von je 100 Cent geteilt ($\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$), wodurch die uneingeschränkte Verwendung aller Tonarten des Quintenzirkels möglich wird. Jedoch sind auch dadurch noch nicht alle Probleme gelöst. Die große Terz hat gegenüber der reinen Terz einen etwas größeren Teilungswert von ≈ 1,26 anstelle von 1,25 (5:4), was jedoch im heutigen Musikgebrauch meist vernachlässigt wird.

Mit diesem Python-Programm[28] ist es möglich, sich eine Kadenz in vier verschiedenen Stimmungen anzuhören, um die verschiedenen Stimmungen auch praktisch zu unterscheiden:

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Spyder Editor

Dies ist eine temporäre Skriptdatei.
"""

from scipy.io import wavfile
import numpy as np
import math
from scipy import size
samplerate = 44100

# Funktion, die einen Ton generiert
def generate_tone(frequency, amplitude, duration):
    "generates a tone; parameters:frequency, amplitude and duration"
    samplerate = 44100

    timegrid = np.linspace(.0, duration-1/samplerate, num=duration*samplerate)
    waveform = np.zeros([size(timegrid),2])

    for k in range(size(harmonics_weight)):
        waveform[:,0]+=amplitude*harmonics_weight[k]*np.sin((k+1)*2*math.pi*frequency*timegrid)
        waveform[:,1]+=amplitude*harmonics_weight[k]*np.sin((k+1)*2*math.pi*frequency*timegrid)
        return waveform

# wandelt Frequenzverhältnis in Cent um
def ratio_to_cent(ratio):
    return np.log2(ratio)*1200.0

# Funktion, die eine Melodie generiert
def generate_melodie(melodie):
    "generates a melodie; parameters:melodie=np.array"
    # Frequenz für c0
    basefrequency=130.813
    # Dauer einer ganzen Note
    baseduration=1
    waveform=np.zeros([0,2])
    for k in range(size(melodie)//4):
        frequency=basefrequency*2.0**(melodie[k][1]+(tone_cent[melodie[k][0]]/1200.0))
        amplitude=melodie[k][3]
        duration=baseduration*melodie[k][2]
        waveform=np.append(waveform,generate_tone(frequency,amplitude,duration),axis=0)
    return waveform

# Funktion, die ein Quartett generiert
def generate_quartett(quartett):
    return .25*(generate_melodie(quartett[0])+generate_melodie(quartett[1])+generate_melodie(quartett[2])+generate_melodie(quartett[3]))

# harmonics
harmonics_elementary=np.array([1])
harmonics_mix=np.array([2,1,2,1,2,1,2,1])

# Stimmungen
# gleichstufige Stimmung
tone_gleichstufig={'c':0,'c-':-100,'c+':100,'d':200,'d-':100,'d+':300,'e':400,'e-':300,'e+':500,'f':500,'f-':400,'f+':600,
                   'g':700,'g-':600,'g+':800,'a':900,'a-':800,'a+':1000,'h':1100,'h-':1000,'h+':1200}
# wohltemperierte Stimmung (Kirnberger)
tone_kirnberger={'c':0,'c-':-100,'c+':90.225,'d':193.157,'d-':100,'d+':294.135,'e':386.314,'e-':300,'e+':498.045,'f':498.045,'f-':400,'f+':590.224,
                 'g':696.578,'g-':600,'g+':800,'a':889.735,'a-':800,'a+':1000,'h':1088.268,'h-':1000,'h+':1200}
# reine Stimmung
tone_rein={'c':0,'c-':-100,'c+':111.7,'d':193.157,'d-':100,'d+':294.135,'e':386.3,'e-':300,'e+':498.0,'f':498.045,'f-':400,'f+':590.224,
           'g':696.578,'g-':600,'g+':800,'a':889.735,'a-':800,'a+':1000,'h':1088.3,'h-':1000,'h+':1200}
# pythagoräische Stimmung
tone_pyth={'c':0,'c-':-100,'c+':111.7,'d':ratio_to_cent(9./8.),'d-':100,'d+':294.135,'e':ratio_to_cent(81./64.),'e-':300,'e+':498.0,'f':ratio_to_cent(4./3.),'f-':400,
           'f+':590.224,'g':ratio_to_cent(3./2.),'g-':600,'g+':800,'a':ratio_to_cent(27./16.),'a-':800,'a+':1000,'h':ratio_to_cent(243./128.),'h-':1000,'h+':1200}

# Kadenz
quartett_simple_kadenz=[[['c',2,1,1],['c',2,1,1],['h',1,1,1],['c',2,1,1]],[['g',1,1,1],['a',1,1,1],['g',1,1,1],['g',1,1,1]],
                        [['e',1,1,1],['f',1,1,1],['d',1,1,1],['e',1,1,1]],[['c',-1,1,1],['f',0,1,1],['g',0,1,1],['c',-1,1,1]]]

harmonics_weight = harmonics_mix

# Auswählen der Stimmung
tone_cent=tone_rein

waveform=generate_quartett(quartett_simple_kadenz)

filename='Stimmungen.wav'
wavfile.write(filename,samplerate,waveform)
```

Festlegung der Parameter Frequenz, Amplitude und Dauer

Form des Sinustones

Formel für die Umwandlung des Frequenzverhältnisses in Cent

Form der Melodie

Stimmungen: Frequenzen der Töne in Cent (C-Dur Tonleiter)

Auswahl der gewünschten Stimmung (tone_gleichstufig/kirnberger/rein/pyth)

Name der fertigen Datei

[28] Entstehung siehe Anmerkungen

6 Obertöne

6.1 Das Geheimnis des Klanges

Wieso klingt der gleiche Ton bei einer Klarinette ganz anders als bei einem Horn?

Die Antworten auf diese Fragen liegen in der Obertonreihe:
Erzeugt ein Musiker mit seinem Instrument einen Ton, indem er beispielsweise eine Luftsäule zum Vibrieren bringt (Blasinstrumente) oder mit einem Bogen über die Seite streicht, schwingt dieser nicht nur mit seiner Grundfrequenz, sondern gleichzeitig mit mehreren weiteren Frequenzen, die Vielfache der Grundfrequenz darstellen.[29] Diese zusätzlichen Schwingungen überlagern die Grundschwingung und werden als Obertöne bezeichnet. Sie beeinflussen die Klangfarbe eines Instrumentes, wobei jedes Instrument ein „charakteristisches Schwingungsbild"[30] seiner Grund- und Oberschwingungen aufweist. Die folgenden drei Grafiken[31] zeigen die Schwingungsbilder einer Stimmgabel, eines Horns und einer Klarinette. Die Stimmgabel schwingt nur in ihrer Grundfrequenz (a: 440 Hz). Beim Horn treten neben dem Grundton noch vier Obertöne mit der zwei bis fünffachen Grundfrequenz auf. Der zweite Oberton ist am stärksten (größte Amplitude). Bei der Klarinette sind es sogar sechs Oberschwingungen mit zwei- bis siebenfacher Grundfrequenz.

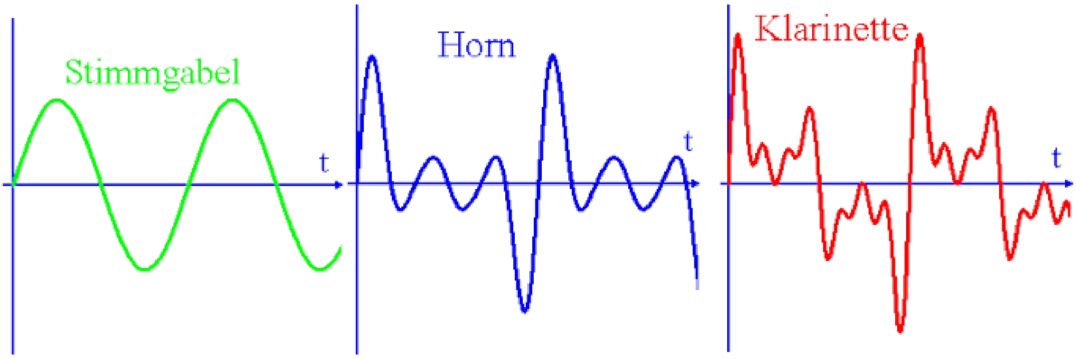


Abb. 9: Überlagerung von Oberschwingungen

6.2 Fourier – Analyse

Um die Frequenzen aller vorhandenen Obertöne zu bestimmen, kann das Tonsignal in eine Summe von Sinusschwingungen zerlegt werden. Diese sogenannte Fourier-Analyse stammt von dem französischen Mathematiker und Physiker Joseph Fourier (1768 – 1830). Mithilfe von Sonic Visualiser führt die Verfasserin die Fourier – Analyse eines mit dem Klavier erzeugten „D" durch. Die untere Grafik zeigt das Ergebnis: Im Bild ist die Stärke des Auftretens der einzelnen Teiltöne an der Intensität der Farben zu erkennen. Weiterhin sind die Töne mit der größten Amplitude violett bis rot dargestellt. Die Frequenz des Grundtons „D" (= größte Amplitude) liegt bei etwa 293 Hz (=f_0). Darüber sind sieben nach oben zunehmend schwächer werdende Obertöne, die obersten sind kaum noch wahrnehmbar. Die ersten drei Obertöne weisen Frequenzen von ca. 440 Hz (1,5 mal f_0), 586 Hz (2 mal f_0) und 733 Hz (2,5 mal f_0) auf. Dieses Muster ist charakteristisch für Töne eines Klaviers.

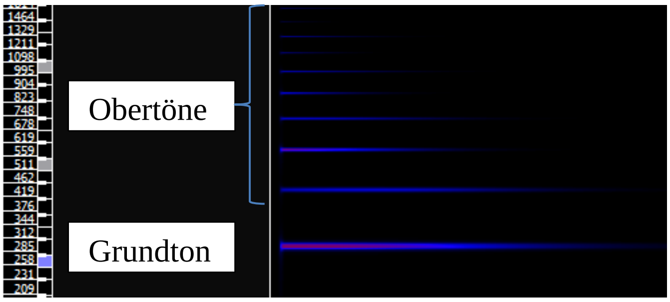


Abb. 10: Fourier - Analyse Sonic Visualiser (Klavier)

[29] https://www.ds.mpg.de/116968/07 (01.01.2020)
[30] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/schall-und-musik (01.01.2020)
[31] https://www.leifiphysik.de/akustik/akustische-wellen/versuche/fourier-analyse-und-synthese (01.01.2020)

7 Fazit: Wo steckt die Mathematik in der Musik?

„Musik ist die versteckte arithmetische Tätigkeit der Seele,
die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet.“[32]*,*
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass eine Vielzahl von Zusammenhängen zwischen den scheinbar so unterschiedlichen Wissenschaften Mathematik und Musik besteht. An einigen Stellen wie beispielsweise bei den verschiedenen Notenwerten, die auf einfacher Bruchrechnung beruhen, sind diese ganz offensichtlich. An anderen Stellen werden sie kaum vermutet. Wer hätte zum Beispiel gedacht, dass der Klang verschiedener Instrumente mit der Überlagerung verschiedener Sinusschwingungen zusammenhängt? Ähnlich überraschend ist die Tatsache, dass mithilfe der Einfachheit derer Zahlenverhältnisse bestimmt werden kann, welche Intervalle für uns Menschen angenehm klingen. Diese, auf den ersten Blick nicht deutlichen, mathematischen Zusammenhänge in der Musik beschreibt der ehemalige deutsche Universalgelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz im obenstehenden Zitat sehr treffend.
In dieser Arbeit hat die Verfasserin versucht, einen möglichst vielfältigen Einblick in die Verbindung von Mathematik und Musik zu geben, wobei sie natürlich trotzdem nicht alle Bereiche ansprechen konnte (Tongeschlechter, Geometrie in der Komposition, Zwölftontechnik…). Zum Schluss werden die wesentlichen Erkenntnisse nochmal in Thesenform zusammengefasst:

1. Taktarten und Notenwerte als Grundelemente bauen auf einfacher Bruchrechnung auf.
2. Auch in der Musik gibt es Parameter. Die Auswirkungen der Veränderung von Lautstärke und Tonhöhe auf einen Ton sind in dessen Sinuskurve gut erkennbar.
3. Die Frequenz desselben Tones wächst mit zunehmender Oktave exponentiell.
4. Jedes Intervall wird durch das Verhältnis zweier Längen eindeutig bestimmt. Je einfacher dieses Längenverhältnis ist beziehungsweise je weniger Zeit die den einzelnen Tönen zugehörigen Sinuskurven benötigen, um auf der x-Achse aufeinanderzutreffen, umso konsonanter ist der Zweiklang.
5. Es gab schon viele Versuche, Frequenzen so auf die Töne einer Oktave zu verteilen, dass möglichst viele Intervalle rein klingen. Eine „perfekte“ Stimmung gibt es nicht.
6. Für die Klangunterschiede verschiedener Instrumente sind Obertöne verantwortlich. Mithilfe der Fourier-Analyse kann ein Ton in einzelne Schwingungen zerlegt werden.

Bruchrechnung, Parameter, Sinuskurven, Formen von Wachstum, Längenverhältnisse oder Stochastik (Mozarts Würfelspiel) – all diese mathematischen Elemente lassen sich auch in der Musik wiederfinden.
Wenngleich Mathematik in den unterschiedlichsten Formen in der Musik vorkommt, kann sie diese jedoch trotzdem nicht vollständig erklären. Sie stellt lediglich eine Art Werkzeug dar, um Musik zu erschaffen oder zu analysieren. Weshalb ein Musikstück Menschen glücklich machen, zum Weinen bringen oder auch auf die Nerven gehen kann, erklärt keine mathematische Formel. Ein bisschen Magie steckt wohl doch in der Musik – zumindest wenn man nach Marylin Manson geht (siehe Zitat Vorwort).

[32] https://beruhmte-zitate.de/zitate/130151-gottfried-wilhelm-leibniz-musik-ist-die-versteckte-arithmetische-tatigkeit-d/ (05.01.2020)

Anhang

Anmerkungen

zu 5.4: Das „Stimmungenprogramm“ ist während meines Schülerpraktikums im Mai 2019 an der TU Dresden (Fakultät Mathematik) bei Herr Prof. Dr. Neukamm entstanden und wurde während der Arbeit an meiner Komplexen Leistung verändert. Wir haben die Version Python 3.7 und Spyder 3 als Python-IDE (Oberfläche zum Programmieren) genutzt. Zum Öffnen des Programmes empfiehlt sich daher ebenfalls die in Python integrierte Entwicklungsumgebung Spyder. Um mehrere Dateien abzuspeichern, muss der Dateiname („Stimmungen“) geändert werden.

Literaturverzeichnis

http://musikanalyse.net/tutorials/intervalle-bestimmen/ [11.12.2019, 16:53 Uhr]
http://www.brefeld.homepage.t-online.de/konsonanz.html [20.12.2019, 15:34 Uhr]
http://www.buchstabenschubser.de/arbeiten/bachhaus-eisenach_bach-14/ [26.10.2019, 15:03 Uhr]
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/zitate.html [25.10.2019, 20:16 Uhr]
http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Wolfsquinte.html [26.12.2019, 15:53 Uhr]
https://beruhmte-zitate.de/zitate/130151-gottfried-wilhelm-leibniz-musik-ist-die-versteckte-arithmetische-tatigkeit-d/ [05.01.2020, 10:45 Uhr]
https://de.wikipedia.org/wiki/Cent_(Musik) [26.12.2019, 15:27 Uhr]
https://de.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6chelverzeichnis [26.10.2019, 16:50 Uhr]
https://de.wikipedia.org/wiki/Mittelt%C3%B6nige_Stimmung [26.12.2019, 17:42 Uhr]
https://mug.didaktik-graz.at/Files/Mathematikum/Mozart.pdf [26.10.2019, 16:43 Uhr]
https://radio-kreta.de/pythagoras-ohne-mathematik-gabe-es-keine-musik/ [26.10.2019, 14:56 Uhr]
https://www.dw.com/de/10-dinge-die-sie-%C3%BCber-beethoven-wissen-sollten/a-18685203 [20.12.2019, 16:07 Uhr]
https://worlds-of-music.de/WOM.php?idex=2410 [24.11.2019, 11:03 Uhr]
https://www.ds.mpg.de/116968/07 [01.01.2020, 21:58]
https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/musik/artikel/rhythmus [02.11.2019, 18:07Uhr]
https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/schall-und-musik [01.01.2020, 22:02]
https://www.mu-sig.de/Theorie/Intervalle/intervall1.htm [17.12.2019, 22:59 Uhr]
https://www.rogersandega.lima-city.de/musik-zitate.html [25.10.2019, 20:23 Uhr]
https://www.theorie-musik.de/grundlagen/mit-noten-notenwerten-rechnen/ [02.11.2019, 18:44 Uhr]
https://www.theorie-musik.de/grundlagen/taktarten/ [02.11.2019, 18:19 Uhr]

Javier Arbonés und Pablo Milrud: Die Mathematik der Musik, Librero 2019
Markus Schönewolf: Der Wolf in der Musik; URL: https://schoenewolf.com/der-wolf-in-der-musik/#bekannte-temperaturen [23.12.2019, 17:33 Uhr]
Philip Bethge: Die Musik – Formel; Artikel in „DER SPIEGEL 31/2003“; URL: https://magazin.spiegel.de/EpubDelivery/spiegel/pdf/27970590 [03.10.2019, 10:16 Uhr]
Prof. Dr. A. Bäcker, Prof. Dr. A. Ketzmerick: (TU Dresden): Einführung in Python, 2019; URL: https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~baecker/teaching/cp2019/einfuehrung.pdf [10/2019]
Ulrich Dibelius: Moderne Musik I. München 1966, Verlag: Piper, 4. Auflage 1988, S. 337f.

verwendete Software:
Centre for Digital Music at Queen Mary, University of London: Sonic Visualiser 4.0, Analyse-Tool für Audiodateien, 2019
Hohenwarter, Markus: GeoGebra, Dynamische-Geometrie-Software (DGS), 2002
Microsoft: Snipping Tool, Software zum Aufnehmen von Screenshots, 2002
Raybaut, Pierre: Spyder, Python-IDE, 2009
van Rossum, Guido: Python 3.7, Programmiersprache, 1991 (aktuelle Version: 2019)

Abbildungsverzeichnis

Bildquellen:

Übersicht über die Notenwerte:
https://www.meyer-gitarre.de/musiklehre/rhythmus/notenwerte/index.html [02.11.2019, 18:35 Uhr]
Monochord nach Pythagoras:
https://www.pinterest.de/pin/786300416163830080/?lp=true [11.12.2019, 17:01 Uhr]
Boomwhackers: eigenes Foto (aufgenommen im Mai 2019)
Sinuskurven eines konsonanten Dreiklangs:
https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY [20.12.2019, 23:11 Uhr]
Klaviatur: eine Oktave von c^1 bis c^2:
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Klaviatur_(Tasten).svg [22.12.2019, 12:21 Uhr]
Quintenzirkel:
https://www.mu-sig.de/Theorie/Quintenzirkel/quintenzirkel.htm [23.12.2019, 14:26 Uhr]
Überlagerung von Oberschwingungen: https://www.leifiphysik.de/akustik/akustische-wellen/versuche/fourier-analyse-und-synthese [01.01.2020, 22:11]

Tabellenverzeichnis

Anlagen

Stimmungenprogramm.py

Erklärung:

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Ort, Datum Unterschrift