Wirtschaftskundliches Bundesrealgymnasium (WRG) Salzburg

Josef-Preis-Allee 5, 5020 Salzburg

Beweise und Beweismethoden – ihre Bedeutung und Entwicklung in der Geschichte der Mathematik

Vorwissenschaftliche Arbeit von

Annabell Salvenmoser

8cn

Mathematik

Betreuerin: Frau Professor Christiane Vogl

Abgabe: 19. Februar 2020

Beweise und Beweismethoden –
ihre Bedeutung und Entwicklung in der Geschichte der Mathematik

„Die Mathematik baut auf Granit.“

Abstract

Die nachfolgende Arbeit beschäftigt sich mit dem für die Mathematik sehr zentralen Thema der mathematischen Beweise. Dabei werden die grundlegenden Begriffe erläutert und ihre Bedeutung für die Mathematik herausgearbeitet. Des Weiteren sind die durch die logische Struktur definierten Beweismethoden beschrieben. Der Fokus liegt aber auf der Geschichte des Beweisens in der Mathematik. Es handelt sich hauptsächlich um eine reine Literaturarbeit, welche durch die Methoden der Recherche, des Exzerpts und der Zusammenfassung entstanden ist, jedoch wird sie durch Beweisführungen untermauert. Wichtige Erkenntnisse und Ergebnisse sind dabei zum einen die Bedeutung für die Mathematik, sowohl als Alleinstellungsmerkmal in Bezug auf andere Naturwissenschaften, als auch für die Wissenschaft an sich, aufgrund des auf Beweisen basierenden Aufbaus. Zum anderen gibt es einige sehr zentrale Beweise in der Geschichte der Mathematik, welche entweder durch ihre lange Dauer bis zum Beweis oder ihre neuartige Methode des Beweisens herausstechen. Die Zukunft ist ungewiss, jedoch ist es aufgrund der geforderten Kreativität unwahrscheinlich, dass mathematische Beweise künftig von Formen künstlicher Intelligenz durchgeführt werden, allerdings stehen die Weichen schon in Richtung computerunterstützte Beweise.

Vorwort

An dieser Stelle gilt mein Dank all jenen, die mich beim erfolgreichen Verfassen dieser Vorwissenschaftlichen Arbeit – in welcher Form auch immer – unterstützt haben.

Meinen MathematikprofessorInnen während meiner acht Jahren am Wirtschaftskundlichen Bundesrealgymnasium Salzburg (Frau Mag. Martina Weiss, Herr Mag. Michael Gampmayer und Frau Mag. Christiane Vogl) möchte ich dafür danken, dass sie mein Interesse für den mathematischen Bereich geweckt haben und mich immer gefördert und unterstützt haben. Sie haben maßgeblich zu meiner Wahl des Themenbereichs Mathematik für meine Vorwissenschaftliche Arbeit beigetragen. Mein Dank gilt auch Frau Mag. Gerda Kürsten, welche meine Faszination für die Beweise in der Mathematik in der fünften Klasse weckte, indem sie uns vom Versuch erzählte, alle mathematischen Inhalte aus einigen Grundannahmen herzuleiten und damit alles mit möglichst geringer wackeliger Basis zu beweisen. Des Weiteren möchte ich mich bei meiner langjährigen Klassenvorständin Frau Mag. Christiane Vogl bedanken, dass sie unsere Klasse zu einer Gemeinschaft gemacht hat, welche sie immer unterstützte, hinter der sie immer stand und für welche sie immer da war und ein offenes Ohr hatte.

Mein Besonderer Dank gilt jedoch meiner großen Schwester, welche mich während des gesamten Arbeitsprozesses unterstüze und darüber hinaus immer für mich da ist, an mich glaubt und mich bei allem unterstützt. Natürlich gilt mein Dank auch meiner Familie und meinen besten Freunden, für alles was sie für mich tun, dass sie mich immer aufbauen, Vertrauen in mich haben, mich bei jeder Entscheidung unterstützten und mich zu dem machen, was ich bin.

Abschließend möchte ich mich bei Sabrina Speringer und Melanie Salvenmoser bedanken, dass sie meine Vorwissenschaftliche Arbeit gelesen haben und mir mit konstruktiver Kritik weiterhalfen.

Mein Dank gilt all diesen Personen, denn ohne sie wäre diese Arbeit in dieser Art nicht möglich gewesen.

Salzburg, am 5. Februar 2020

Annabell Salvenmoser

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Beweise spielen eine zentrale Rolle in der Mathematik. Zum einen stellen sie ein wichtiges Alleinstellungsmerkmal der Mathematik in Bezug auf andere Naturwissenschaften dar und zum anderen sind sie die stabile Basis dieser Wissenschaft an sich. Während andere Naturwissenschaften auf vorläufige Thesen setzen, welche die Wirklichkeit zum gegenwärtigen Zeitpunkt bestmöglich beschreiben und jederzeit widerlegt werden können, gelten in der Mathematik nur bewiesene Aussagen als „Wahrheit" – das dann jedoch für immer.

Dieses nicht anzweifelbare Fundament der Mathematik fasziniert mich, seit mir die mathematischen Beweise in der Oberstufe begegnet sind. Eine grundsätzlich simple schrittweise Argumentation, welche eine solche Bedeutung für die Mathematik hat, begeisterte mich so sehr, dass ich beschloss, ihr meine VWA zu widmen, um mehr über diesen zentralen Teil dieser Naturwissenschaft herauszufinden. Dabei interessierte mich besonders die Geschichte der Beweise und der Beweismethoden und wie sie sich im historischen Verlauf entwickelt haben, da sich vor allem die Möglichkeiten und Methoden der Beweisführung im Laufe der Zeit gravierend verändert haben. Zuerst wollte ich verstehen, was ein „Beweis" grundsätzlich ist, wie er aufgebaut ist und was dazu gehört. Des Weiteren beleuchtete ich anschließend die Bedeutung der Beweise sowohl in der Mathematik als auch im Vergleich zu anderen Naturwissenschaften. Daraufhin stellte sich die Frage nach verschiedenen Beweismethoden, genauer gesagt ihrem Prinzip. Der Fokus der Arbeit liegt jedoch auf der Geschichte der Beweise und den damit verbundenen Meilensteinen – von Pythagoras über Fermat bis hin zum „Vier-Farben-Theorem".

Aufgrund des Themas bot sich mir fast nur die Möglichkeit einer beinahe reinen Literaturarbeit, jedoch entschied ich mich neben Recherchen, Exzerpten und Zusammenfassungen die Arbeit durch Beweisführungen aufzulockern und zu untermauern.

Die Arbeit gliedert sich in die vier Bereiche meiner Forschungsfragen. Dabei stehen grundlegendes Wissen zu den mathematischen Beweisen bzw. die Begriffsklärungen zum besseren Verständnis am Anfang. Die Unterkapitel sind dabei in der Reihenfolge angeordnet, in der sie im Beweis benötigt werden. Darauf folgt das Kapitel zur Erläuterung der Bedeutung des mathematischen Beweisens, unterteilt in die Bedeutung als Alleinstellungsmerkmal und die Stellung in der Mathematik an sich. Darauf folgen die Prinzipien der Beweismethoden, welche durch ihre logische Struktur beschrieben werden und abschließend werden die Meilensteine in der Geschichte der Beweise chronologisch von Pythagoras bis hin zur Zukunft zusammengefasst.

Nun aber zur eigentlichen Arbeit „Beweise und Beweismethoden – ihre Bedeutung und Entwicklung in der Geschichte der Mathematik“, an deren Anfang ich ein die Bedeutung der Beweise in der Mathematik demonstrierendes Zitat stellen möchte, welches in Bezug auf Wiles‘ Beweis von „Fermats letztem Satz“ steht:

> *Wiles sieht, daß er die Mathematik um eines ihrer größten Rätsel berauben mußte, um ihr einen ihrer größten Beweise zu geben.*[1]

Angemerkt werden muss, dass zur besseren Verständlichkeit die Variablen in der gesamten Arbeit vereinheitlicht wurden.

[1] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 314.

2. Begriffsklärungen und Grundlegendes zu mathematischen Beweisen

2.1. Der mathematische Beweisbegriff

Ein mathematischer Beweis dient zur Bestätigung der mathematischen Wahrheit einer Vermutung, einer unbewiesenen Aussage.[2] Es handelt sich um eine Argumentationskette von Axiomen, also Aussagen, welche als richtig definiert wurden, zu einer Aussage, die es zu beweisen gilt.[3] Bei den einzelnen Schritten gelten dabei die Regeln der mathematischen Logik. Das Beweisprinzip und die damit verbundenen Schlüsse sind ausschließlich aufgrund der „mathematischen Implikation" möglich, da eine Aussage, welche aus einer wahren Aussage hergeleitet wird, zwingend auch wahr ist, solange die mathematischen Regeln eingehalten werden.[4] Wird nun von Axiomen auf eine Aussage geschlossen und die Axiome sind wahr, so ist diese – der Mathematik nach – „bewiesen" und darf als Satz bzw. Theorem betrachtet werden.[5] Fasst man alle Lehrsätze eines speziellen Gebietes zusammen, so spricht man weiters von einer Theorie.[6] Solange ein Beweis allerdings nicht gelungen ist, muss die Aussage als Vermutung deklariert werden. In der Geschichte wurde dies oft nicht befolgt. So wurde beispielsweise von „Fermats letztem Satz" gesprochen, wobei dieser eigentlich zu dieser Zeit noch nicht bewiesen war und damit „Fermats letzte Vermutung" genannt werden hätte müssen.[7]

2.2. Aufbau eines mathematischen Beweises

Der Aufbau mathematischer Beweise ist meist sehr ähnlich, er ist jedoch nicht ganz eindeutig definiert. Von schlichten Beweisführungen ausschließlich in der Sprache der Mathematik bis hin zu ausformulierten und kommentierten Beweisen findet man in der Mathematik beinahe alles. Trotz der großen Bandbreite gleichen sie sich allerdings trotzdem alle in einigen charakteristischen Punkten. Dabei beginnt man immer mit der Formulierung der Vermutung, also des späteren Satzes, der bewiesen werden soll. Darauf folgt eine Klärung aller im Beweis

[2] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 17.
[3] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 21. und vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 61.
[4] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 10.
[5] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 41.
[6] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 76.
[7] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92

verwendeter Namen und Bezeichnungen. Diese müssen eindeutig vor dem Beweis geklärt werden, damit die Argumentationskette nachvollziehbar bleibt. Dann folgt optional die Anführung der verwendeten Axiome, von denen aus dann durch mathematische Schlüsse je auf eine neue, aus den Axiomen hergeleitete Aussage geschlossen wird. Dafür können auch korrekte, umgangssprachliche Sätze verwendet werden. Je nach Leserschaft besteht auch die Möglichkeit die Schlüsse, also Beweisschritte, zu kommentieren und kurz zu erklären, was in jenem Schritt gemacht bzw. angewendet wurde. Oft wird die Beweisführung mit einer Floskel wie q.e.d. („quod erat demonstrandum“, also lateinisch für „…, was zu beweisen war“) oder einem Zeichen wie einem Viereck („■“) bzw. einem Doppelstrich („//“) beendet.[8]

Bei der mathematischen Beweisführung passieren allerdings auch häufig Fehler. Die folgenden Fehlerquellen sollten daher beachtet werden. Zum einen dürfen keine Beispiele als Argumente herangezogen werden, da mathematische Beweise immer für den allgemeinen Fall gelten müssen. Zum anderen muss zur bestmöglichen Nachvollziehbarkeit darauf geachtet werden, dass man keine gleichen Symbole für unterschiedliche Dinge verwendet. Des Weiteren müssen Begriffe, wie bereits erwähnt, immer deutlich definiert werden, da unpräzise oder widersprüchlich definierte Begriffe eine Barriere darstellen können. Zudem sollten die Schritte nachvollziehbar, das heißt ein roter Faden erkennbar sein, und keine Gedankensprünge bestehen.[9] In der Praxis wird dies allerdings oft nicht eingehalten. Am wichtigsten ist allerdings die Basis des Beweises, weshalb nur bewiesene Behauptungen oder anerkannte Axiome als Axiome herangezogen werden dürfen, ansonsten wäre die Basis wackelig, was weitreichende Folgen haben könnte.[10]

Was bewiesen wird und auf welche Weise dies geschieht, hängt auch in der Mathematik von Geschmäckern und „Trends“ in dieser Naturwissenschaft ab. Wenngleich es auf den ersten Blick so scheint, als ginge es in dieser Wissenschaft nur um „richtig“ oder „falsch“, entspricht diese Annahme keinesfalls der Realität. Vielmehr gibt es sehr wohl Raum für „guten“ und „schlechten“ Geschmack und es lassen sich sogar Modeerscheinungen erkennen.[11]

---

[8] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 62.
[9] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 62.
[10] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92.
[11] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 64-65.

2.3. Die Vermutung

Eine Vermutung bildet immer den Ausgangspunkt eines Beweises und kann als eine nicht bewiesene Aussage deklariert werden. Sie gilt es durch einen Beweis herzuleiten, sodass sie danach in der Mathematik als Satz bzw. Theorem bezeichnet und verwendet werden darf. Vermutungen dürfen in mathematischen Beweisen allerdings nicht als Axiome herangezogen werden, ansonsten würde es sich bei dem vermeintlichen „Satz“ bzw. „Theorem“ ebenfalls nur um eine Vermutung handeln, welche trotz Beweises falsch sein könnte, da die Basis wackelig, also nicht bewiesen, wäre.[12]

2.4. Die Aussage

In der Mathematik versteht man unter einer Aussage eine sprachliche Formulierung, welcher ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Der Wahrheitswert kann dabei zwei verschiedene Zustände annehmen: Zum einen „wahr“ und zum anderen „falsch“. Unbedeutend ist dabei, ob der Satz in Wörtern ausformuliert ist oder ob es sich um eine mathematische Formel handelt. Aussagen sind zentral für die mathematischen Beweise, doch darüber hinaus ist die Beschäftigung mit ihnen auch ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Logik.[13] Durch logische Operatoren können einfache Aussagen zu komplexeren zusammengesetzt werden. Die Üblichsten sind dabei „und“, „oder“ und „nicht“. In mathematischen Beweisen finden sich zumeist Aussagen der Form „wenn A, dann B“, wobei sowohl A, als auch B eben solche verknüpften Aussagen sein können.[14]

2.5. Mathematische Logik – Logische Operatoren

Die mathematische Logik beschäftigt sich mit Aussagen.[15] Damit fest verbunden sind die diesen zugeordneten Wahrheitswerte und die Verbindung durch logische Operatoren von einfachen Aussagen zu komplexeren, welche in mathematischen Beweisen oft als Vermutungen

---

[12] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92.

[13] Vgl. Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger. Heidelberg, 2016, S. 18. und vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 17.

[14] Vgl. Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 111. und vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 5. und vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 17.

[15] Vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 7.

dienen.[16] Nachfolgend werden die häufigsten dieser logischen Operatoren angeführt und kurz beschrieben.

2.5.1. Die Konjunktion

Die Konjunktion bezeichnet die Verknüpfung zweier Aussagen durch „und". Dargestellt wird dies durch das mathematische Zeichen „∧". Im Falle einer Verknüpfung der Aussagen A und B würde dies bedeuten, dass sowohl A als auch B wahr sein müssen, damit „$A \wedge B$" insgesamt wahr wäre. Also inkludiert die Konjunktion die Werte, welche **sowohl** in A **als auch** in B enthalten wären.[17] Demnach sieht die Wahrheitswertetabelle für die Konjunktion folgendermaßen aus:

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \wedge B}$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Tabelle 1: Wahrheitswertetabelle der Konjunktion (Verf.)

2.5.2. Die Disjunktion

Bei der Disjunktion werden Aussagen durch „oder" miteinander verknüpft. Dies wird durch das Zeichen „V" dargestellt und impliziert, dass **entweder** die eine **oder** die andere oder **beide** Aussagen „wahr" sein müssen, damit die Verknüpfung insgesamt „wahr" ist. Hier ist es also, im Gegensatz zur Konjunktion, nicht zwingend notwendig, dass beide Aussagen „wahr" sind, sondern lediglich mindestens eine der beiden.[18] Somit sind **alle** Werte der beiden Mengen inkludiert. Daraus resultiert, dass die Wahrheitswertetabelle wie folgt aussieht:

[16] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 5. und vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 17.
[17] Vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 18.
[18] Vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 18-19.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \vee B}$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Tabelle 2: Wahrheitswertetabelle der Disjunktion (Verf.)

2.5.3. Die Implikation

Besonders wichtig für das Beweisen ist die Implikation, die daher auch in einem eigenen Kapitel behandelt wird (siehe Kapitel 2.7 Die Implikation). Eine Implikation beschreibt eine Verknüpfung zweier Aussagen durch „dann“. Die Aussagenverknüpfung hat somit die Form „Wenn A, dann B“ bzw. mathematisch „$A \rightarrow B$“. Hier ist die Wahrheitswertetabelle nicht mehr so trivial, wie bei der Konjunktion und der Disjunktion, denn nun ist zu bedenken, dass aus einer falschen Annahme auch eine falsche Aussage als „wahr“ hergeleitet werden kann.[19] So folgt daraus die nachfolgende Wahrheitswertetabelle.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \rightarrow B}$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Tabelle 3: Wahrheitswertetabelle der Implikation (Verf.)

2.5.4. Die Negation

Die Negation einer Aussage A ist $\neg A$ und bedeutet, dass sich der Wahrheitswert der Aussage umkehrt. Dadurch ist $\neg A$ einer „wahren“ Aussage A „falsch“ und umgekehrt $\neg B$ von einer „falschen“ Aussage B „wahr“.[20]

[19] Vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 19.
[20] Vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 17.

$\boldsymbol{A}$	$\neg \boldsymbol{A}$
W	F
F	W

Tabelle 4: Wahrheitswertetabelle der Negation (Verf.)

2.6. Axiome

Axiome spielen eine wichtige Rolle in puncto mathematische Beweise. Sie bilden das Fundament jedes Beweises und der Mathematik im Generellen. Aus diesem Grund bezeichnet sie Martin Hairer, österreichischer Mathematiker und Fields-Medaillen-Träger, in einem Interview auch als „Granit".[21] Unter Axiomen versteht man in der Mathematik Grundannahmen, mathematische Tatsachen, deren Wahrheit von MathematikerInnen festgelegt wurde und selbst ohne Beweis nicht angezweifelt wird.[22] In Beweisen bilden sie die Basis und stehen stets an deren Anfang. Durch das mathematische Umformen dieser Axiome und das Anwenden von bereits bewiesenen Sätzen wird dann die Vermutung hergeleitet und dadurch bewiesen.[23] Die Wichtigkeit von Axiomen wird darin deutlich, dass Sätze bzw. Theoreme immer nur so wahr sind, wie die am Anfang stehenden Axiome, auf die sich ihr Beweis stützt. Axiome sind die Grundannahmen der Mathematik. Auf ihnen basieren sämtliche Beweise und somit auch bewiesenen Aussagen.[24] Als Ausgangspunkte für Beweise sind Vermutungen daher ungeeignet, da ansonsten die Wahrheit des daraus resultierenden „Satzes" bzw. „Theorems" nicht gewährleistet werden könnte bzw. stark relativiert werden müsste.[25]

2.7. Die Implikation

Die Implikation ist ein Begriff der mathematischen Logik und bezeichnet ein Prinzip, welches das Grundprinzip eines Beweises ermöglicht. Grundsätzlich besagt die Implikation in der Mathematik, dass eine aus einer als richtig bekannten Aussage mathematisch hergeleitete

---

[21] Vgl. Czepel, Robert: „Die Mathematik baut mit Granit". In: science.orf.at, 8.6.2018. Online verfügbar über: https://science.orf.at/stories/2917543/ (letzter Zugriff am 10.2.2019). und vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 60.

[22] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 61.

[23] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 17. und vgl. Ebbinghaus, Heinz-Dieter/Flum, Jörg/Thomas, Wolfgang: Einführung in die mathematische Logik. Deutschland, 6. Aufl., 2018, S. 6.

[24] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 60-61. und vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 41.

[25] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92.

Aussage ebenfalls richtig ist.[26] Es kann mit einer Verknüpfung zweier Aussagen A und B durch „dann" verglichen werden.[27] Dabei gibt es ganz bestimmte Konstellationen, bei denen eine Aussage „wahr" bzw. „falsch" ist. Diese sind in einer Wahrheitswertetabelle für die Implikation ersichtlich (siehe Kapitel 2.5.3. Die Implikation).[28] In der Mathematik wird meist das Symbol „⇒" verwendet, in der mathematischen Logik hingegen findet man „→" als Zeichen für die Implikation.[29] Ein Beweis besteht, wie bereits erwähnt, aus Schlussfolgerungen von der wahren Aussage A zur Aussage B. Durch die Implikation sind diese Schlüsse von einer zur anderen Aussage und schlussendlich von A zu B nun zu rechtfertigen, weshalb ohne Probleme schrittweise von Axiomen auf eine Vermutung umgeformt werden kann, mit dem Ergebnis, dass die Vermutung ebenfalls als richtig gewertet werden darf.[30]

2.8. Der Satz bzw. das Theorem

Bei einem „Satz" bzw. „Theorem" handelt es sich um das Endprodukt eines geglückten mathematischen Beweises.[31] Vor und während des Beweises wird der formulierte Satz bzw. die mathematische Formel „Vermutung" genannt, egal wie vielversprechend sie auch aussehen mag oder wie viele Beispiele sie stützen.[32] Erst sobald der Beweis geglückt ist, die „Vermutung" also unter der Voraussetzung der Wahrheit des gewählten Axiomensystems sicher richtig ist, darf sie als „Satz" bzw. „Theorem" bezeichnet werden.[33] In der Mathematik haben nur Sätze bzw. Theoreme die Berechtigung zur Anwendung, da Vermutungen immer potenziell „falsch" sind.[34] Ein berühmtes Beispiel einer fehlerhaften Verwendung dieser beiden Begriffe bzw. nicht erfolgten Differenzierung zwischen diesen ist „Fermats letzter Satz", welcher 350

[26] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 10.
[27] Vgl. Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004, S. 19.
[28] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 47.
[29] Vgl. Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 10.
[30] Vgl. Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 111. und Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997, S. 10.
[31] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 41.
[32] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92. und vgl. Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013, S. 144.
[33] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 41.
[34] Vgl. Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013, S. 144.

Jahre lang fälschlich als „Satz" bezeichnet wurde. Vor dem Auffinden des Beweises handelte es sich strenggenommen nämlich um „Fermats letzte Vermutung".[35]

2.9. Proposition, Lemma und Korollar

In mathematischen Werken werden Sätze, also „geglückt bewiesene Vermutungen", oft je nach Gewicht bzw. Funktion in Untergruppen unterteilt. Die drei bekanntesten sind dabei die Proposition, das Lemma und das Korollar. Die Proposition bezeichnet dabei eine bezüglich des Kontextes relativ leicht beweisbare Aussage. Sätze, welche ausschließlich innerhalb anderer Beweise von Bedeutung sind, also allein wenig Gewicht für die Mathematik haben, werden oft als Lemmata deklariert. Das Lemma wird daher auch oft als Hilfssatz bezeichnet. Des Weiteren gibt es das Korollar bzw. den Folgesatz, welche einen Satz beschreiben, der aus einem anderen Beweis entweder direkt hervorgeht oder daraus ohne großen Mehraufwand hergeleitet werden kann.[36]

2.10. Die Definition

In der Mathematik versteht man unter einer Definition eine eindeutige und präzise Beschreibung, welche einen Begriff oder ein Konzept fassbar macht und keinen Raum für Interpretation oder Auslegung lässt. Mit diesen definierten Begriffen kann dann in der Mathematik auf exakte Weise gearbeitet werden.[37]

2.11. Die Theorie

Eine mathematische Theorie lässt sich am einfachsten durch die Gesamtheit aller gewonnener Lehrsätze in einem speziellen Gebiet beschreiben.[38] Sie baut auf eine minimale Anzahl an jeweils eigenen Axiomen, um die Basis so stabil wie möglich zu gestalten und gewinnt daraus neue Erkenntnisse, also mathematische Sätze bzw. Theoreme.[39]

---

[35] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92.
[36] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 41.
[37] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 61. und vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 66.
[38] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 76.
[39] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 61.

2.12. „Das mathematische Haus“

Vergleicht man die mathematische Theorie nun mit einem Haus, so lassen sich die Axiome als Ziegelsteine der Basis bzw. das Axiomensystem als Fundament des Hauses darstellen. Darauf werden weitere Ziegelsteine, die mathematischen Sätze bzw. Theoreme, gemauert. Der verbindende Mörtel ist vergleichbar mit den mathematischen Beweisen. Der/Die MaurerIn wäre in diesem Fall also der/die MathematikerIn, der/die aus dem Axiomensystem-Fundament durch das Beweisen von Sätzen ein Haus, also eine mathematische Theorie, baut. Hier ist nun gut ersichtlich, weshalb sich die Mathematik um eine stabile Basis, also ein „wahres“ Axiomensystem, bemüht.[40]

Abbildung 1: Skizze zum mathematischen Gebäude

3. Bedeutung der Beweise für die Mathematik

Mathematische Beweise sind in zweierlei Hinsicht für die Mathematik von großer Bedeutung. Zum einen machen sie den fundamentalen Unterschied zwischen ihr und den anderen Naturwissenschaften aus und zum anderen teilen sie sich selbst in einen wissenschaftlichen und in einen kulturtechnischen Bereich. [41]

[40] Vgl. Abbildung 1: Skizze zum mathematischen Gebäude. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Skizze_zum_mathematischen_Gebäude.svg (letzter Zugriff am 3.1.2020).

[41] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 47. und vgl. Reiseführer S. 40

3.1. Beweise als Alleinstellungsmerkmal der Mathematik

Zwischen der Mathematik und den anderen Naturwissenschaften lässt sich ein fundamentaler Unterschied im Umgang mit der Anerkennung von „Wahrheiten“ ausmachen. Während in anderen Naturwissenschaften auf experimentelle Ergebnisse gesetzt und versucht wird, das Beobachtete zu diesem Zeitpunkt mit einer Hypothese bestmöglich zu beschreiben und gute Vorhersagen zu treffen, bis eine bessere, überarbeitete oder völlig neu gedachte Theorie auftaucht, wird in der Mathematik die Logik herangezogen.[42] Es wird mittels einer schrittweisen Beweisführung nach den Regeln der Mathematik, welche von einigen Grundannahmen auf das gewünschte Ergebnis schließt und keine Zweifel zulässt, die Wahrheit der Behauptung unwiderlegbar bewiesen.[43] Im Gegensatz zu den anderen naturwissenschaftlichen Disziplinen haben diese Wahrheiten kein Ablaufdatum, sie stützen sich nicht auf Erfahrungen, Lehrmeinungen, Beobachtungen, ungenaue Experimente oder den derzeitigen Wissensstand und sind daher mehr als nur hochwahrscheinliche Annahmen – sie sind, einmal bewiesen, unverhandelbare Wahrheiten und für immer wahr.[44]

Zum besseren Verständnis ein Vergleich: Die anderen Naturwissenschaften bedienen sich der sogenannte „empirischen Induktion“, bei welcher sie auf Basis einiger Beobachtungen auf Gesetzmäßigkeiten schließen – beispielsweise von der Beobachtung, dass die Sonne 100 Tage hintereinander im Osten aufgeht, darauf, dass sie wohl immer dort aufgehen wird. Würde man diese Methode auf die Mathematik übertragen, so würde man Vermutungen nur für einige Fälle überprüfen, beispielsweise für die ersten 150, und auf die Richtigkeit vertrauen, anstatt eine allgemeine Überprüfung – ohne Ausnahmen – vorzunehmen.[45]

[42] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 45 und S. 92.
[43] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 44.
[44] Vgl. Holz, Albert Violant i: Das Rätsel von Pierre de Fermat. Auf der Suche nach dem Beweis von Fermats letztem Satz. Niederlande, 2016, S. 130. und vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 58. und vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 47 und S. 45.
[45] Vgl. Courant, Richard/Robbins, Herbert: Was ist Mathematik? Heidelberg, 2010, S. 8.

Auch das Problem des „unvollständigen Schachbretts“[46] bietet die Möglichkeit, die beiden unterschiedlichen Herangehensweisen zu verdeutlichen. Ausgangspunkt ist ein Schachbrett, bei welchem zwei diagonal liegende Eckfelder fehlen (siehe Abbildung 2). Daraus ergibt sich ein Schachbrett mit 62 Quadraten. Die Frage ist nun, ob man dieses Brett mit 31 Dominosteinen vollständig auslegen kann. Der Ansatz der anderen Naturwissenschaften wäre es, dies einfach auszuprobieren, einige Male zu scheitern und zu vermuten, dass es **wahrscheinlich** nicht möglich ist, solange solange dies nicht widerlegt wird. Die Mathematik hingegen überlegt, dass das verbleibende Brett aus 32 schwarzen und 30 weißen Feldern besteht. Jeder Dominostein bedeckt je zwei verschiedenfarbige Felder. Daraus folgert man, dass 30 Dominosteine also 30 schwarze und 30 weiße Felder bedecken. Da nun nur noch zwei schwarze Felder verbleiben und die Prämisse besteht, dass jeder Stein zwei verschiedenfarbige Felder bedeckt, ist es **sicher** nicht möglich, das unvollständige Schachbrett vollständig zu bedecken.[47]

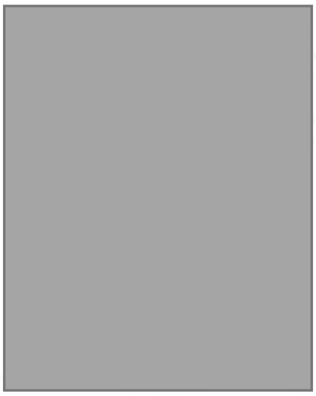


Abbildung 2: Das „unvollständige Schachbrett"

Martin Hairer machte diesen Unterschied zwischen der Mathematik und den anderen Naturwissenschaften – hier insbesondere im Hinblick auf die Physik – in einem Interview sehr deutlich. Auf die Frage, warum er von der Physik zur Mathematik gewechselt sei, antwortete er wie folgt:

> *[…] In der Mathematik konnte ich fühlen, dass ein Beweis für alle Ewigkeit gilt. Wenn etwas wahr ist, dann bleibt es wahr. In der Physik waren die Argumente immer wackeliger. Ich dachte mir: Wenn ich als Forscher eine Theorie aufbaue, kommt vielleicht in fünf Jahren ein anderer und zerstört die Theorie komplett. In der Mathematik kann man nichts zerstören, da baut man mit Granit.*[48]

[46] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!
[47] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 47.
[48] Czepel, Robert: „Die Mathematik baut mit Granit“. In: science.orf.at, 8.6.2018. Online verfügbar über: https://science.orf.at/stories/2917543/ (letzter Zugriff am 10.2.2019).

Eben diese ewige Gültigkeit und unverhandelbare Wahrheit macht den fundamentalen Unterschied aus. So starb Pythagoras beispielsweise in der Gewissheit, dass sein Satz, der 500 v. Chr. zutraf, bis in alle Ewigkeit wahr bleiben würde.[49]

3.2. Die Bedeutung des Beweisens in der Mathematik

> *Ein bewiesenes mathematisches Ergebnis bringt eine tiefere Wahrheit zum Ausdruck als jede andere wahre Aussage, denn es handelt sich um ein Resultat einer Schritt für Schritt logischen Argumentation.*[50]

In der Mathematik als Wissenschaft spielen Beweise die zentrale Rolle. Ohne die strenge mathematische Beweisführung wäre eine Gewissheit der Richtigkeit eines Satzes undenkbar. Da die Mathematik für sich beansprucht, eine exakte Wissenschaft zu sein, bedient sie sich der „axiomatischen Methode“. Das bedeutet es gibt immer ein Axiomensystem von welchem aus man durch logische Schlüsse zu einer neuen Aussage gelangt, bis man die zu beweisende Aussage erhält.[51] Experimente reichen deshalb nicht aus, da in einem endlichen Leben keine unendlichen Aussagen überprüft werden können.[52] So wird ohne einen Beweis – und mag die Vermutung noch so richtig scheinen oder mit etlichen Bespielen belegt worden sein – keine Vermutung zu einem Satz bzw. Theorem. Dies hat auch seinen Grund, denn während beim „Problem des unvollständigen Schachbretts“ die Vermutung mit der bewiesenen Aussage übereinstimmt, gibt es auch Vermutungen, welche auf den ersten Blick und die ersten Versuche vielversprechend aussehen, wenn man für die Variablen größere Zahlen einsetzt, aber beispielsweise nicht mehr wahr sind. Ein berühmtes Beispiel dafür sind die „Fermat-Zahlen“. Pierre de Fermat stellte 1637 die Vermutung auf, dass alle F_n, für die $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ gilt, immer Primzahlen sind. Er „überprüfte“ diese Vermutung anhand der Beispiele $F_0 - F_4$. Da es sich bei diesen Zahlen tatsächlich um Primzahlen handelte, vermutete er, dies sei ein Gesetz. Erst 100 Jahre später widerlegte Euler diese Vermutung, da er berechnete, dass

[49] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 47.
[50] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 49.
[51] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 76.
[52] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 59-60. und Holz, Albert Violant i: Das Rätsel von Pierre de Fermat. Auf der Suche nach dem Beweis von Fermats letztem Satz. Niederlande, 2016, S. 130.

F_5 – 4 294 967 297 – keine Primzahl, sondern durch 641 teilbar ist.[53] Daher setzt die Mathematik als Wissenschaft auf das Beweisprinzip, um Aussagen als unverhandelbaren Wahrheiten deklarieren zu können.

Wäre diese Vermutung während dieser 100 Jahre als Axiom verwendet worden, so hätte die Wahrheit aller daraus resultierenden Sätze angezweifelt werden müssen. Genau aus diesem Grund kennt die Mathematik die Axiome und Beweisführung betreffend sehr klare Regeln. Fehler in der logischen Argumentation hätten weitreichende und verheerende Folgen, welche ganze Bereiche der Mathematik zum Einstürzen bringen könnten.[54] In Beweisen dürfen, aufgrund des streng axiomatischen Aufbaus der Mathematik, daher nur Axiome oder daraus hergeleitete Aussagen verwendet werden. So wird die „wackelige" Basis möglichst gering gehalten, da, wenn diese wenigen Axiome richtig sind, alle daraus resultierenden Aussagen ebenfalls sicher richtig sind.[55] Dabei ist allerdings anzumerken, dass MathematikerInnen nichts als absolute Wahrheit anerkennen, sondern jeden Satz durch die Voraussetzung, dass das angewendete Axiomensystem richtig ist, relativieren.[56] Die Wahrheit der gewählten Axiome ist allerdings nicht zuletzt auch deshalb wichtig, da durch falsche Annahmen in einer langen Argumentationskette eine gewünschte Aussage herauskommen kann, welche aber aufgrund der falschen Annahme eigentlich falsch ist. Ein Beispiel dafür ist der Beweis, dass der Papst dieselbe Person wie ein Inuit, also ein Inuit, ist und zwar nur durch die falsche Annahme 2=1. Eine Menge mit maximal zwei Elementen – Papst und Inuit – wird gebildet und durch die Annahme hat die Menge nur ein Element, was bedeutet, dass der Papst ein Inuit sein müsste.[57]

4. Beweismethoden (Prinzip)

Die Beweismethoden werden grundsätzlich in zwei Gruppen unterteilt. Zum einen gibt es die durch die Zielsetzung beschreibbaren Methoden, wofür der konstruktive Beweis oder der Existenzbeweis Beispiele wären, und zum anderen gibt es die durch ihre logische Struktur

[53] Vgl. Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013, S. 144.
[54] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 92.
[55] Vgl. Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013, S. 146.
[56] Vgl. Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011, S. 61. und vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 41.
[57] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 48.

beschreibbaren Beweismethoden, beispielsweise den Widerspruchsbeweis oder den Induktionsbeweis. In den folgenden Unterkapiteln werden einige Beispiele der zweiten Gruppe gezeigt. Zudem gilt es zu erwähnen, dass es zumeist mehre Methoden gibt, einen Beweis für ein und dieselbe Aussage zu führen. Die Methode ist darüber hinaus nicht aus der Aussage erkenntlich und selbst wenn, ist die Beweisidee trotzdem nicht inkludiert.[58]

4.1. Der direkte Beweis

Der direkte Beweis wird auch Implikationsbeweis genannt. Dies geht auf das Prinzip der Beweistechnik zurück, welches auf der Implikation beruht und daher für Aussagen der Form „Wenn A dann B“, mathematisch „$A \Longrightarrow B$“, geeignet ist. Dabei wird der „Wenn-Teil“, also die Behauptung, als wahre Voraussetzung genommen, um den „Dann-Teil“ zu beweisen.[59] Ausgehend von dieser Voraussetzung zeigt man die Wahrheit der Implikation „$A \Rightarrow B$“ und daraus folgt, dass auch die Aussage B wahr sein muss.[60] Der direkte Beweis ist leicht verständlich aus einzelnen Zwischenschritten (einfachen Implikationen) aufgebaut, an deren Anfang entweder ein Axiom oder ein bereits früher bewiesener Satz, eine gesetzte Voraussetzung, eine Definition oder eine Kombination solcher Aussagen steht.[61] Die angesprochenen Zwischenschritte machen den Beweis nachvollziehbar und ermöglichen von A auf A_1 usw. bis hin zu B, anstatt von A direkt auf B schließen zu müssen.[62] Die Struktur des Beweises sieht daher meist statt „$A \Rightarrow B$“ eher so aus: „$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B$“. Jedoch kann sie auch noch komplizierter gestaltet sein und Verzweigungen enthalten.[63]

Im folgenden Beispiel wird die direkte Beweisführung angewendet.

Lemma […]. *Wenn a durch 6 teilbar ist, dann ist a auch durch 3 teilbar.*

Beweis. Wenn a durch 6 teilbar ist, dann gibt es eine ganze Zahl k, so dass $a = 6 * k$ gilt. Da $6 = 2 * 3$, folgt $a = (2 * 3) * k$. Durch Umformung erhält

[58] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 40.
[59] Ohlbach, Hans Jürgen/Eisinger, Norbert: Design Patterns für mathematische Beweise. Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker. Deutschland, 2017, S. 28.
[60] Fritzsche, Klaus: Mathematik für Einsteiger. Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn. Heidelberg, 5. Aufl., 2015, S. 28.
[61] Vgl. Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013, S. 145. und vgl. Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger. Heidelberg, 2016, S. 19.
[62] Vgl. Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013, S. 145.
[63] Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger. Heidelberg, 2016, S. 19.

man $a = 3 * (2 * k)$. Weil $2 * k$ eine ganze Zahl ist, folgt schließlich, dass a durch 3 teilbar ist. $\blacksquare$[64]

Erklärung der Vorgehensweisen zu den einzelnen Implikationsschritten A_1 bis A_5:

A:	a ist durch 6 teilbar.	
A_1:	$a = 6 * k$ für eine ganze Zahl k.	(Def. der Teilbarkeit durch 6)
A_2:	$a = (2 * 3) * k$ für eine ganze Zahl k.	$(6 = 2 * 3)$
A_3:	$a = (3 * 2) * k$ für eine ganze Zahl k.	(Kommutativität von $*$)
A_4:	$a = 3 * (2 * k)$ für eine ganze Zahl k.	(Assoziativität von $*$)
A_5:	$a = 3 * k'$ für eine ganze Zahl k'.	(Ersetzung von $2 * k$ durch k')
B:	a ist durch 3 teilbar.	(Def. der Teilbarkeit durch 3)[65]

4.2. Der indirekte Beweis

4.2.1. Beweis durch Widerspruch (reductio ad absurdum)

Diese Beweismethode, bei welcher der Beweis in der Herleitung eines logischen Widerspruchs besteht, wurde von Euklid in seinen Büchern „Elemente“ als „reductio ad absurdum“ deklariert.[66] Anders als beim direkten Beweis wird hier kein Objekt „konstruiert“, sondern anhand eines hergeleiteten Widerspruchs gezeigt, dass es widersprüchlich wäre, wenn es nicht existieren würde.[67] Das Prinzip der Beweismethode basiert auf der logischen Schlussfolgerung: Wenn die Behauptung B richtig ist, so folgt sie logisch aus der Voraussetzung A, ansonsten folgt daraus, dass das Gegenteil der Behauptung ($\neg B$) richtig ist. Dasselbe gilt übrigens auch umgekehrt.[68] Zu Beginn der Beweisführung trifft man die Annahme, dass unter den vorliegenden Voraussetzungen die Behauptung falsch sei und fügt die Negation der Behauptung B, also $\neg B$, als zusätzliche Voraussetzung hinzu.[69] Dann wird durch direkte Schlussfolgerung ein

---

[64] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 113.
[65] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 113.
[66] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 71.
[67] Vgl. Courant, Richard/Robbins, Herbert: Was ist Mathematik? Heidelberg, 2010, S. 69.
[68] Vgl. Ohlbach, Hans Jürgen/Eisinger, Norbert: Design Patterns für mathematische Beweise. Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker. Deutschland, 2017, S. 48.
[69] Vgl. Ohlbach, Hans Jürgen/Eisinger, Norbert: Design Patterns für mathematische Beweise. Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker. Deutschland, 2017, S. 48. und vgl. Fritzsche, Klaus: Mathematik für Einsteiger. Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn. Heidelberg, 5. Aufl., 2015, S. 28. und Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 115.

Widerspruch hergeleitet, also eine Aussage C, welche offensichtlich falsch ist. Da die zu Grunde liegende Implikation „$A \wedge (\neg B) \Longrightarrow C$“ aber wahr ist, muss „$A \wedge (\neg B)$“ auch falsch sein. Bei A handelt es sich allerdings um eine Voraussetzung, weshalb A als wahr angenommen wird. Daraus folgt, dass $\neg B$ falsch sein muss und aufgrund der logischen Schlussfolgerung zu Beginn folgt, dass B, also die eigentliche Behauptung, wahr sein muss.[70]

Ein Beispiel zur Demonstration des Prinzips des Beweises durch Widerspruch:

> **Lemma […].** *Wenn a und b gerade sind, dann ist auch $a * b$ gerade.*
>
> **Beweis.** Wir führen einen Widerspruchs-Beweis. Sei also angenommen, dass a und b gerade sind, und dass $a * b$ ungerade ist. Da b gerade ist, kann b geschrieben werden als $b = 2 * k$ für eine gerade Zahl k. Deshalb gilt $a * b = 2 * (a * k)$.
> Da $a * k$ eine ganze Zahl ist, muss $a * b$ gerade sein. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme hergeleitet. ■[71]

Erklärung der Vorgehensweisen zu den einzelnen Implikationsschritten A_1 bis A_7:

> $A \wedge \neg B$: a und b sind gerade, und $a * b$ ist ungerade.
>
> A_1: a ist gerade, und $b = 2 * k$ für eine ganze Zahl k, und $a * b$ ist ungerade. (Definition einer geraden Zahl)
>
> A_2: a ist gerade, und $a * b = a * (2 * k)$ für eine ganze Zahl k, und $a * b$ ist ungerade. (Multiplikation von a und b)
>
> A_3: a ist gerade, und $a * b = (a * 2) * k$ für eine ganze Zahl k, und $a * b$ ist ungerade. (Assoziativität von $*$)
>
> A_4: a ist gerade, und $a * b = (2 * a) * k$ für eine ganze Zahl k, und $a * b$ ist ungerade. (Kommutativität von $*$)
>
> A_5: a ist gerade, und $a * b = 2 * (a * k)$für eine ganze Zahl k, und $a * b$ ist ungerade. (Assoziativität von $*$)
>
> A_6: a ist gerade, und $a * b = 2 * k'$ für eine ganze Zahl k', und $a * b$ ist ungerade. (Ersetzung von $a * k$ durch k')

[70] Vgl. Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger. Heidelberg, 2016, S. 20.
[71] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 115.

A_7:	a ist gerade, und $a * b$ ist gerade, und $a * b$ ist ungerade.
	(Definition einer geraden Zahl)[72]

4.2.2. Beweis durch Kontraposition

Der Name dieser Beweismethode rührt von der zu „$A \Longrightarrow B$“ logisch äquivalenten Implikation „$\neg B \Longrightarrow \neg A$“, welche als Kontraposition der ersteren bezeichnet wird.[73] Das Prinzip basiert damit auf dem Kontrapositionsgesetz „$(A \Longrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$“.[74] Anwendbar ist der Beweis durch Kontraposition, sobald es sich bei der Behauptung um eine Implikation handelt. Von dieser wird im ersten Schritt die Kontraposition gebildet, das heißt, es werden die Negationen der beiden Implikationsseiten gebildet und getauscht.[75] Dies ist der Ausgangspunkt für die Hypothese, dass „nicht B“ gilt.

Ein Beispiel für die Anwendung dieser Beweismethode:

> **Lemma […].** *Wenn a^2 eine ungerade Zahl ist, dann ist auch a ungerade.*
>
> **Beweis.** Wir führen einen Beweis durch Kontraposition. Sei also angenommen, dass a gerade ist. Dann ist $a = 2 * k$ für eine ganze Zahl k. Deshalb ist $a^2 = 2 * (k * a)$. Weil $k * a$ eine ganze Zahl ist, folgt schließlich $a^2 = 2 * k‘$ für eine ganze Zahl $k‘$. Also ist a^2 gerade. ■[76]

Erklärung der Vorgehensweisen zu den einzelnen Implikationsschritten A_1 bis A_7:

$\neg B$:	a ist gerade.	
A_1:	$a = 2 * k$ für eine ganze Zahl k.	(Definition einer geraden Zahl)
A_2:	$a * a = (2 * k) * a$ für eine ganze Zahl k.	(Multiplikation mit a)
A_3:	$a^2 = 2 * (k * a)$ für eine ganze Zahl k.	(Assoziativiät von $*$)

[72] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 115.
[73] Vgl. Ohlbach, Hans Jürgen/Eisinger, Norbert: Design Patterns für mathematische Beweise. Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker. Deutschland, 2017, S. 44.
[74] Vgl. Fritzsche, Klaus: Mathematik für Einsteiger. Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn. Heidelberg, 5. Aufl., 2015, S. 29.
[75] Vgl. Ohlbach, Hans Jürgen/Eisinger, Norbert: Design Patterns für mathematische Beweise. Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker. Deutschland, 2017, S. 44.
[76] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 114.

A_4:	$a^2 = 2 * k'$ für eine ganze Zahl k'.	(Ersetzung von $a * k$ durch k')
$\neg A$:	a^2 ist gerade.	(Definition einer geraden Zahl)[77]

4.3. Die vollständige Induktion

Die Beweismethode der vollständigen Induktion ist fast ausschließlich für Aussagen der Form „für alle n aus den natürlichen Zahlen gilt“ geeignet. Dafür wird in der Mathematik der Ausdruck „$\forall n \in N: p(n)$“ verwendet.[78] Peanos Erkenntnis des axiomatischen Aufbaus der natürlichen Zahlen bildet dabei die Basis des Prinzips. Sie besagt, dass jede natürliche Zahl erhalten werden kann, wenn man beginnend mit 0 immer 1 addiert. Die Beweismethode arbeitet hierbei mit einer Induktionsbasis ($p(0)$) und einem Induktionsschritt, in welchem bewiesen wird, dass aus $p(a)$ immer $p(a+1)$ folgt. Durch das gleichzeitige Gelten der Induktionsbasis und des Induktionsschrittes wird auf die Wahrheit der Aussage geschlossen.[79] Der Aufbau eines Beweises durch vollständige Induktion für eine Aussage $p(n)$ ist in der Regel immer gleich. Im ersten Schritt wird die Induktionsbasis, auch Induktionsanfang genannt, also $p(0)$, bewiesen. Darauf folgt der Beweis des Induktionsschrittes, welcher sich aus Induktionsvoraussetzung und Induktionsschluss zusammensetzt. Man nimmt dazu die Induktionsvoraussetzung, also die Hypothese $p(a)$, als wahr an, um $p(a+1)$ zu beweisen, wobei a eine beliebig gewählte natürliche Zahl sei. Man folgert daraus dann den Induktionsschluss $p(a+1)$ und durch die gleichzeitige Richtigkeit von Induktionsbasis und Induktionsschritt folgt dann die Wahrheit der Aussage.[80]

Angemerkt werden muss aber, dass dieses Prinzip nicht nur für natürliche Zahlen gilt, sondern auch für alle anderen induktiven Zahlenfolgen, wie zum Beispiel für alle ungeraden Zahlen, solange eine Induktionsbasis und ein Induktionsschritt definiert werden.[81]

[77] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 114.
[78] Vgl. Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 128.
[79] Vgl. Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 129.
[80] Vgl. Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 133.
[81] Vgl. Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 136.

Ein Beispiel für eine Beweisführung durch vollständige Induktion:

[...] Die Folge der so genannten *harmonischen Zahlen* $h_1, h_2, h_3, \ldots$ ist definiert durch

$$h_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}^+$

Satz [...]. *Für alle natürlichen Zahlen n gilt:* $h_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über n.

Induktionsbasis: Für $n = 0$ gilt $h_{2^0} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $h_{2^a} \geq 1 + \frac{a}{2}$ für ein beliebig gewähltes $a \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss: Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}
h_{2^{a+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^a} && + \frac{1}{2^a+1} + \ldots + \frac{1}{2^{a+1}} \\
&= \underbrace{h_{2^a}}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} && + \frac{1}{2^a+1} + \ldots + \frac{1}{2^{a+1}} \\
&\geq \overbrace{\left(1 + \frac{a}{2}\right)} && + \frac{1}{2^a+1} + \ldots + \frac{1}{2^{a+1}} \\
&\geq \left(1 + \frac{a}{2}\right) && + 2^a * \frac{1}{2^{a+1}} \\
&= \left(1 + \frac{a}{2}\right) && + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{(a+1)}{2}.
\end{aligned}$$

■[82]

[82] Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006, S. 134-135.

5. Entwicklungen und Meilensteine in der Geschichte der Beweise[83]

5.1. Der Weg zum mathematischen Beweisen

Die Ursprünge mathematischer Beweisführungen reichen bis ins 18. Jahrhundert vor Christus, also in die Zeit der Babylonier, zurück.[84] Wenngleich diese zwar noch keine streng axiomatische Mathematik verfolgten, sind doch Tafeln mit ersten simplen Beweisführungen überliefert. Die Beweisidee als solche, welche wir heute kennen, finden wir allerdings erst im antiken Griechenland. Wie bzw. warum es zu dieser Idee kam, ist nicht überliefert. Genauso wenig ist die Entwicklung des formalen Aufbaus bekannt, jedoch verwenden viele Vertreter des antiken Griechenlands Beweisführungen oder beziehen sich zumindest darauf.[85] 600 vor Christus führt Thales beispielsweise einen mathematischen Beweis, jedoch war die Idee zu dieser Zeit noch lange nicht ausgereift.[86]

5.2. Pythagoras – Die Beweisidee wird revolutioniert[87]

Pythagoras‘ Beweis war nicht der erste und, aus heutiger Sicht, auch nicht einer der anspruchsvollsten und doch war das Aufsehen, welches er erregte, riesig. Der antike Mathematiker bewies auf eine Art und Weise, welche jeder mit höheren schulmathematischen Kenntnissen nachvollziehen und verstehen kann, dass der „Satz von Pythagoras“ für jedes rechtwinkelige Dreieck im gesamten Universum gilt. Im Gegensatz zu Thales‘ einfachen geometrischen Beweisen brachte Pythagoras mit seiner Schritt-für-Schritt logischen Argumentation jedoch eine tiefere Wahrheit zum Ausdruck. Er revolutionierte die Idee der Beweisführung, sodass ab diesem Zeitpunkt viel komplexere Aussagen bewiesen werden konnten. Die Begeisterung der Mitmenschen lässt sich nicht zuletzt daran festmachen, dass als Dank für diesen gelungenen Beweis den Göttern hundert Ochsen geopfert wurden. Zudem machte Pythagoras durch diesen Beweis die Mathematik greifbar und verband so das Logische der Mathematik mit dem Anschaulichen der anderen Naturwissenschaften. Dadurch wurde die stabile Basis für die mit

[83] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!
[84] Vgl. Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. New York, 2011, S. 21.
[85] Vgl. Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. A Look at the Changing Nature of Mathematical Proof. 2007. Online verfügbar über: https://archive.org/details/TheProofIsInThePudding_201810/mode/2up (letzter Zugriff am 4.2.2020), S. ix-x.
[86] Vgl. Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. New York, 2011, S. 21. und Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 49.
[87] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!

Fehlern verbundenen Messungen der Naturwissenschaften geschaffen.[88] Dieses Greifbare, welches durch diesen Beweis geschaffen wurde und eine mögliche Erklärung, weshalb der Beweis solch einen hohen Stellenwert in der Gesellschaft erlangt hat, liefert John Horgan in einer Ausgabe der „Scientific American“ in seinem Artikel „The death of proof“, welchen er 1993 veröffentlichte:[89]

> *The relation they found between the sides of a right triangle held true not for sometimes or most of the time but always – regardless of whether the triangle was a piece of silk or a plot of land or marks on papyrus.*[90]

5.3. Ein neues Beweisprinzip entsteht – Die vollständige Induktion

In Euklids Buch „The Elements“ tauchte um 285 vor Christus erstmals ein Beweis mit einem völlig neu gedachten Beweisprinzip auf. Später sollte das Prinzip unter dem Namen „vollständige Induktion“ bekannt werden, jedoch vergingen bis dahin noch einige Jahrhunderte.[91] Das Prinzip geriet in Vergessenheit, bis zirka 1654 Pierre de Fermat und Blaise Pascal die Methode wieder aufgreifen. Blaise Pascal wendet das Prinzip aus Euklids „The Elements“ in seiner „Traité du triangle arithméthique“ („Abhandlung über das Dreieck der Binomialkoeffizienten“), welche er 1654 veröffentlichte, an und beweist damit sein „Pascal’sches Dreieck“. Er ist es auch, der kurz darauf dieses Prinzip im von ihm verfassten kleinen Satz, der „Consequence 12“[92], erklärt, sie als Beweismethode definiert, ihr allerdings immer noch keinen Namen gibt.[93] Mit dem Beginn des 18. Jahrhunderts erlebt das namenlose Prinzip einen Aufschwung und wird immer populärer.[94] 1838 erwähnt dann auch der Logiker Augustus de Morgan in seinem

---

[88] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 49-50.

[89] Vgl. Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. New York, 2011, S. 22. und vgl. Horgan, John. The Death of Proof. In: Scientific American, 1993, vol. 269 (4) S. 92–102. Online verfügbar über: https://www.jstor.org/stable/24941653?seq=1 (letzter Zugriff am 23.8.2019), hier S. 93.

[90] Horgan, John. The Death of Proof. In: Scientific American, 1993, vol. 269 (4) S. 92–102. Online verfügbar über: https://www.jstor.org/stable/24941653?seq=1 (letzter Zugriff am 23.8.2019), hier S. 93.

[91] Vgl. Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), hier S. 29 und S. 36. und vgl. Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. New York, 2011, S. 21.

[92] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!

[93] Vgl. Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), hier S.34-35.

[94] Vgl. Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), hier S. 36.

Artikel „Induction“ in der „Penny Cyclopaedia“ die Beweismethode. Nun begannen erste Namensvorschläge, wie beispielsweise „Ahnenmethode“ aufgrund des Prinzips mit „n“ und „$n + 1$“. Die meisten Ideen lieferte dabei der deutsche Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner, weshalb die Methode von einigen Zeitgenossen auch als „Kästner‘sche Beweismethode“ bezeichnet wurde. So nannten das Prinzip auch, unter anderen, Carl Gustav Jakob Jacobi in seinem Essay und Constantin Franz in „Philosophie der Mathematik“[95].[96] Erst Ende des 18. Jahrhunderts erhielt die Beweismethode ihren heutigen Namen – „vollständige Induktion“. Namensgebend war dabei Jakob Friedrich Fries. Der Name war allerdings nicht neu erfunden, er wurde erstmals von Christian Wolff, bereits einige Zeit früher, verwendet, jedoch bezeichnete dieser ein Prinzip damit, welches uns heute als die „summative Induktion“, also die unendliche Induktion bekannt ist.[97]

5.4. Was lange währt wird endlich gut – Der Beweis zu „Fermats letzter Satz“

Der Beweis des „letzten Satzes von Fermat“ 1993 war das Ende der Geschichte eines 300 Jahre lang ungelösten mathematischen Problems, dessen Ursprung im antiken Griechenland liegt und über Jahrhunderte die besten MathematikerInnen der Welt beschäftigte.[98] Das Problem basiert auf Pythagoras‘ Satz, also der Formel „$a^2 + b^2 = c^2$“ und der Frage, ob es rechtwinkelige Dreiecke gibt, bei denen alle drei Seiten ganzzahlige Längen besitzen.[99] Im 17. Jahrhundert begann Pierre de Fermat, ein zwischen 1601 und 1607 in Südfrankreich geborener Jurist und Hobby-Mathematiker, sich für diesen antiken „Satz des Pythagoras“ zu interessieren und entwickelte daraus den bekannten „letzten Satz von Fermat“.[100] Er probierte in der simplen Formel Pythagoras‘ höhere Exponenten aus und stellte schnell die Vermutung auf, dass

---

[95] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!
[96] Vgl. Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), S. 36.
[97] Vgl. Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), S. 36-37.
[98] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 30.
[99] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 53. und vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[100] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 55. und vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).

ganzzahlige Tripel, wie es sie in Pythagoras' Satz gibt, für Exponenten höher als 2 nicht existieren.[101] Er war nicht der Erste, der sich mit den pythagoräischen Zahlentripeln auseinandersetzte. 250 nach Christus hatte Diophant von Alexandria eine Methode entwickelt, welche es ermöglicht, theoretisch alle diese Tripel zu berechnen, jedoch sind das natürlich unendlich viele, weshalb es praktisch nicht möglich ist.[102] Der Südfranzose Pierre de Fermat kritzelte seine Vermutung: „$x^n + y^n = z^n$ hat keine ganzzahligen Lösungen für n größer als 2“ 1640 als Notiz an den Rand einer Buchseite und vermerkte darunter: „Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand zu schmal, ihn zu fassen.“[103] Aus heutiger Sicht ist diese Aussage anzuzweifeln, da im späteren komplexen Beweis des „Großen Satzes von Fermat“ Vorkenntnisse und Beweise benötigt wurden, welche Fermat zu seiner Zeit noch nicht zur Verfügung standen.[104] Diese Randbemerkung Fermats beschäftigte jedoch die nachfolgenden Generationen von MathematikerInnen und verblüffte durch ihre vermeintliche Einfachheit, welche sie von den anderen großen Problemen der Mathematik unterschied.[105] Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, welche für n eingesetzt werden können, gestaltete sich der Beweis äußert schwierig. Jedoch wurden dennoch immer wieder kleinere Erfolge verzeichnet, indem die Aussage für bestimmte n bewiesen wurde. So bewies es 1676 Bernard Frénicle de Bessy für $n = 4$, Leonhard Euler 1770 für $n = 3$, 1825 Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und Adrien-Marie Legendre für $n = 5$. Selbiges folgte für $n = 14;\ 7;\ 11;\ 17$ und 23, allerdings noch lange nicht für den allgemeingültigen „letzten Satz von Fermat“. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war immer noch kein Beweis dafür in Sicht, jedoch stiftete der Darmstädter Mathematiker und Arzt, Paul Friedrich Wolfskehl, ein Preisgeld in Höhe von umgerechnet mehr als

[101] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 55.
[102] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[103] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 55. und Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[104] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020). und vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[105] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020). und vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 30.

einer Million Euro, nachdem, so die Legende, ihn das Problem vor dem Suizid bewahrt hatte. Jedoch war dieser „Preis“ an die Bedingung geknüpft, dass der Beweis bis zum 13. September 2007 in einer anerkannten Fachzeitschrift publiziert würde. Der Beweis schien allerdings so fern, dass 1989 in einer Folge der Fernsehserie „Raumschiff Enterprise“ behauptet wurde, dass, selbst unter der Voraussetzung, dass Supercomputer existierten, der „Große Fermatsche Satz“ nicht vor dem 24. Jahrhundert bewiesen werden könne.[106] 1953 wurde dann Andrew Wiles in England geboren.[107] Bereits im Alter von zehn Jahren stieß er auf den geheimnisvollen „letzten Satz von Fermat“, als er, begeistert vom mathematischen Tüfteln, in einer Bibliothek nach Mathematikrätseln suchte.[108] Dabei bekam er das Buch „The last Problem“ von Eric Temple Bell in die Hände. Es beeindruckte ihn, dass er als zehnjähriger Junge ein Problem verstand, welches doch keiner der großen MathematikInnen bisher zu lösen vermochte.[109] Während seiner Teenagerzeit versuchte Wiles den Beweis für dieses Problem zu finden. Nach all den erfolglosen Versuchen gab er es mit Beginn seines Studiums allerdings fürs Erste auf.[110] In den 80er Jahren wanderte der Mathematiker dann nach Amerika aus, wo er eine Professur in Princeton antrat und sich einen Ruf als begnadeter Mathematiker aufbaute. Doch nach einigen Jahren zog er sich dann plötzlich zurück.[111] Andrew Wiles beschrieb diese Zeit später als die Zeit, in der er zu „Fermats letztem Satz“ zurückkehrte. Während seine MathematikkollegInnen vermuteten, dass er einer der jungen Mathematiker sei, der ausgebrannt oder nicht gerade fleißig war, wurde er 1985 durch eine Idee des deutschen Mathematikers Gerhard Frey auf eine neue Möglichkeit gebracht.[112] Dieser hatte nämlich die Vermutung aufgestellt, dass der „letzte Satz von Fermat“ bewiesen wäre, wenn der Beweis für die „Taniyama-Shimura-“

[106] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[107] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 29.
[108] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 29-31. und vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[109] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 29-31.
[110] Vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[111] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 26.
[112] Vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).

und die „Epsilon-Vermutung“ gefunden würde. Bald wurde die lange mit Zweifeln verbundene zweitere Vermutung bewiesen, weshalb es „nur noch“ an einem Beweis für die „Taniyama-Shimura-Vermutung“ fehlte.[113] Also machte sich Wiles erneut daran den Beweis zu finden, allerdings nahm er sich dennoch Zeit für seine junge Familie, wie er in einem Interview mit der „Zeit“ 1993 sagte:[114]

> *Da ich eine junge Familie habe, gab ich mir Mühe, mein Denken auf bestimmte Tageszeiten zu beschränken. Wenn ich jeden Tag zwölf Stunden konzentriert gearbeitet hätte, wäre es sehr hart für die Familie gewesen; auch ich hätte es wohl nicht ausgehalten. Aber das Problem hat mich niemals losgelassen.*[115]

Zirka zwischen Ende April und Anfang Mai 1993 gelang Wiles dann der Durchbruch. Er hatte es geschafft die Teile der „Taniyama-Shimura-Vermutung“ zu beweisen, welche für den Beweis des „letzten Satzes von Fermat“ nötig waren und so auch den „Großen Fermatschen Satz“ bewiesen. Die darauffolgenden sechs bis sieben Wochen verbrachte er mit der Kontrolle seines Beweises, bevor er Mitte Juni eine Vorlesung ankündigte, in der er den Beweis zum „letzten Satz von Fermat“ führen wollte.[116] Am 23. Juni 1993 war es dann soweit: Andrew Wiles trug den Beweis am Newton-Institut der Universität Cambridge vor den Augen von rund 200 MathematikkollegInnen an der Tafel vor und schloss seinen Vortrag mit den Worten „Ich denke, das genügt.“.[117] Sein Beweis umfasst zwischen 200 und 250 Seiten,[118] wobei ExpertInnen schätzen, dass er ausformuliert vermutlich fünfmal solange sein könnte.[119] In einem

---

[113] Vgl. Holz, Albert Violant i: Das Rätsel von Pierre de Fermat. Auf der Suche nach dem Beweis von Fermats letztem Satz. Niederlande, 2016, S. 128. und vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[114] Vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[115] Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[116] Vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).
[117] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).
Weitere Informationen befinden sich im Anhang!
[118] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!
[119] Vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020). und vgl. Horgan, John. The Death of Proof. In: Scientific American, 1993, vol. 269 (4) S. 92–102. Online verfügbar über: https://www.jstor.org/stable/24941653?seq=1 (letzter Zugriff am 23.8.2019), hier S. 93 und vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über:

Interview am 6. August 1993 sagte Wiles, dass er glaube, dass die Methode auf jeden Fall das Problem lösen werde, er sich allerdings nicht sicher sei, ob jedes Detail richtig sei.[120] Nach diesem Vortrag war die Freude in der Mathematik zwar groß, doch Nicholas Katz, ein mathematischer Zahlentheoretiker und ebenfalls Professor in Princeton, machte sich sofort an die Überprüfung der 200 Seiten und entdeckte eine Lücke, welche er am 23. August 1993 dann publik machte. Wiles erkannte den Fehler und machte sich mit seinem Schüler Richard Taylor an die Arbeit. Nach der anfänglichen Angst, dass sich das Problem aufgrund des „Gödelschen Unvollständigkeitssatzes“ möglicherweise nicht beweisen ließe, gelang es ihnen im Oktober 1994 die Lücke zu schließen und 1997 den Beweis des „letzten Satzes von Fermat“ zu publizieren. Im selben Jahr wurde er von der Community der MathematikerInnen als richtig anerkannt. Nun waren alle Voraussetzungen erfüllt, um den von Paul Friedrich Wolfskehl gestifteten Preis auszuzahlen. Der Preis, der ursprünglich mehr als eine Million Euro wert war, war zu diesem Zeitpunkt durch die Inflation allerdings nur noch 35 000 Euro wert. Zudem erhob Queen Elizabeth Andrew Wiles im Jahr 2000 in den Ritterstand.[121] Eric Temple Bell bezeichnet Wiles‘ Beweis des „letzten Satzes von Fermat“ in seinem Buch als „Lotteriegewinn in der Zahlentheorie“.[122]

5.5. Computer verhelfen zum Beweis – Das Vier-Farben-Theorem[123]

Als der Teilzeitmathematiker Francis Guthrie im Oktober 1852 seine Vermutung für das „Vier-Farben-Theorem“ aufstellte, dachte er wohl nicht, dass es, ähnlich wie bei „Fermats letztem Satz“, noch 124 Jahre dauern sollte, bis ein Beweis für seine Annahme gefunden würde. Seine Vermutung war, ebenfalls eine Parallele zu Fermat, für jeden nachvollziehbar und auf den ersten Blick sehr simpel, jedoch schwer beweisbar. Sie besagte, dass vier Farben **immer** ausreichen würden, um eine Karte so zu bemalen, dass keine zwei Felder, die sich an mindestens

https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).

[120] Vgl. Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).

[121] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).

[122] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 94.

[123] Weitere Informationen befinden sich im Anhang!

einer Grenze berühren, dieselbe Farbe hätten.[124] Francis Guthries Vermutung gelangte dann über dessen Bruder zum Mathematikprofessor Augustus de Morgan, welcher sich dieser annahm, allerdings zu keiner Lösung kam, sie aber an die nachfolgenden Generationen von MathematikerInnen weitergab. Jedoch war die auf das Problem gerichtete Aufmerksamkeit lange nicht besonders groß. 1878 flammte dann nach einem Treffen der Londoner Mathematikgesellschaft die Begeisterung dafür auf, als Arthur Cayley einen Beweis für die Vermutung forderte. Bereits 1879 schien dieser gefunden zu sein. Alfred Kempes Beweis des „Vier-Farben-Theorems" stellte sich jedoch 1890 als falsch heraus. Percy Heawood entdeckte im Beweis Fehler, konnte aber aus der Grundidee einen Beweis, dass fünf Farben immer ausreichen, ableiten. In den darauffolgenden Jahren flaute das Interesse am Problem wieder ab, bis 1976 zwei Mathematiker der Universität von Illinois einen unkonventionellen Beweis lieferten. Kenneth Appel und Wolfgang Haken hatten es durch einen Beweis geschafft, die unendlichen problematischen Fälle auf eine Anzahl zu reduzieren, welche mithilfe von Computern in 1 200 Stunden überprüft werden konnte.[125] Die unkonventionelle Methode eines Computerbeweises lieferte somit nach 124 Jahren endlich den Beweis, dass vier Farben **immer** ausreichen, um eine Karte so zu bemalen, dass keine zwei Felder, die sich an mindestens einer Grenze berühren, dieselbe Farbe haben.[126]

5.6. Fortsetzung folgt? – Die Zukunft des mathematischen Beweisens

In Bezug auf die zukünftige Entwicklung der mathematischen Beweise tun sich viele Fragen auf. Wie werden sie sich entwickeln? Wird es nur noch Computerbeweise geben? Werden wir die Beweise nicht mehr kontrollieren bzw. nachvollziehen können oder wäre es sogar denkbar, dass es keine Beweise mehr geben wird? Genauso vielfältig wie die offenen Fragen sind auch die Meinungen zu diesen. Einige MathematikerInnen sind der Überzeugung, dass Computer niemals die Aufgabe eines Mathematikers/einer Mathematikerin ersetzen werden können, zumindest was die Findung eines passenden Beweises angeht. Den Grund dafür sehen sie darin, dass der Beweistyp und die Beweisidee nicht gleich erkenntlich sind und daher die KI-Forschung bei der Automatisierung der Beweisführungen nur eingeschränkt erfolgreich

[124] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 326. und Garnier, Rowan/Taylor, John: 100% Mathematical Proof. Chichester, 1996, S. 8.
[125] Vgl. Garnier, Rowan/Taylor, John: 100% Mathematical Proof. Chichester, 1996, S. 9.
[126] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 326. und vgl. Garnier, Rowan/Taylor, John: 100% Mathematical Proof. Chichester, 1996, S. 8.

sein könne. Dies bestätigt sie auch darin, dass die mathematische Forschung eng mit Kreativität verbunden ist.[127] Eine andere Ansicht in puncto Entwicklungen hin zu ausschließlich Computerbeweisen ist, dass Wiles‘ Beweis des „letzten Satzes von Fermat“ der letzte der Art „Bleistift, Papier und reine Logik“ gewesen sein könnte.[128] John Horgan prognostizierte in einer Ausgabe der „Scientific American“ 1993, dass die Bedeutung von Beweisen bereits bis 2043 deutlich vermindert sein werde. Die zunehmende Komplexität der Mathematik und die Entwicklung der Computer sprächen gegen eine Zukunft der Beweise, wie wir sie heute kennen. Die Rechenleistungen der Computer würden es dem Menschen unmöglich machen, all das zu kontrollieren, geschweige denn nachzuvollziehen. Eine Kontrolle könnte daher nur noch durch andere Computer erfolgen.[129] Anzumerken ist allerdings, dass es auch heute bereits Beweise gibt, wie beispielsweise Herrn Mochizukis 500 Seiten langen zur „abc-Vermutung“, welche nicht nachvollzogen werden können und welche dennoch vom Menschen stammen.[130] Fest steht, dass „Proof Checker“, also computerüberprüfte Beweise aus Menschenhand, zunehmen und vermutlich auch weiter zunehmen werden. Ob sie allerdings die Aufgabe der MathematikerInnen ersetzen werden, ist ungewiss.[131] Für eine Zukunft der Beweise sprechen jedenfalls die unzähligen ungelösten mathematischen Rätsel in Bereichen wie beispielsweise den vollkommenen Zahlen oder Primzahlen, sowie der Eifer der MathematikerInnen einen Beweis dafür zu finden.[132]

---

[127] Vgl. Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012, S. 40.

[128] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 326.

[129] Vgl. Horgan, John. The Death of Proof. In: Scientific American, 1993, vol. 269 (4) S. 92–102. Online verfügbar über: https://www.jstor.org/stable/24941653?seq=1 (letzter Zugriff am 23.8.2019), hier S. 94.

[130] Vgl. Dambeck, Holger: Top-Mathematiker ratlos. Niemand versteht Herrn Mochizuki. In: SPIEGEL Wissenschaft, 18.12.2015. Online verfügbar über: https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/abc-vermutung-mathematiker-verstehen-beweis-nicht-a-1068399.html (letzter Zugriff, am 29.12.2019).

[131] Vgl. Dambeck, Holger: Beweis Software. Sind Computer die besseren Mathematiker? In: SPIEGEL Wissenschaft, 8.8.2015. Online verfügbar über: https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathematik-und-informatik-loest-software-bald-menschen-ab-a-1046794.html (letzter Zugriff, am 26.1.2020).

[132] Vgl. Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 314.

6. Schluss

Im Zuge der vorliegenden Arbeit fand ich heraus, dass man unter mathematischen Beweisen eine schrittweise nach den Regeln der mathematischen Logik geführte Argumentationen versteht, welche Vermutungen zu nicht anzweifelbaren Theoremen bzw. Sätzen machen. Sie haben deshalb eine solche Bedeutung für die Mathematik, da sie zum einen aufgrund der unendlichen Gültigkeit nach einem geglückten Beweis ein Alleinstellungsmerkmal dieser Naturwissenschaft zu anderen darstellen und zum anderen in der Mathematik an sich die charakteristische stabile Basis bilden. Eine weitere interessante Erkenntnis in Bezug auf die Einstellung unter den MathematikerInnen war unter anderem, dass trotz der genauen Arbeit mit Beweisen und dem axiomatischen Aufbau der Wissenschaft, MathematikerInnen dennoch alle Wahrheiten von bewiesenen Aussagen mit der Voraussetzung relativieren, dass die zugrundeliegenden Axiome richtig seien. Des Weiteren war ein Ergebnis meiner Recherche im Rahmen dieser VWA, dass es viele verschiedene Beweismethoden gibt, welche sich im Laufe der Geschichte des Beweisens entwickelten. Der Weg bis zu den heute deklarierten Methoden war aber weit, was man am Beispiel der Entwicklung des „Beweises durch vollständige Induktion" sehen kann. Im Zuge des Arbeitsprozesses dieser VWA schränkte ich die Beweismethoden auf die durch die logische Struktur beschreibbaren ein, da alle zu bearbeiten den Rahmen dieser Arbeit gesprengt hätte. Außerdem befasste ich mich mit der Geschichte der mathematischen Beweise und pickte mir dabei die „wichtigsten" Meilensteine heraus. Dazu zählt der berühmte Beweis des „Satzes von Pythagoras", welcher durch seine Entstehungszeit beeindruckt, Wiles' Beweis von „Fermats letztem Satz", der durch die Odyssee bis zum Beweis heraussticht und das „Vier-Farben-Theorem", welches das Zeitalter der computerunterstützten Beweise einläutete und veranschaulicht. Leider war es mir im Rahmen dieser VWA nicht möglich, die ersten mathematischen Beweise zu beleuchten, da die Informationen zu den Beweisen in der Zeit der Babylonier sehr rar sind. Zur Zukunft der Beweise gibt es hingegen viele Materialien mit unterschiedlichen Meinungen. Während die einen davon ausgehen, dass Computer alle Aufgaben im Bereich der Beweise übernehmen werden und Menschen die komplexen Beweise nicht mehr durchblicken und kontrollieren können werden, meinen andere, dass die gefragte Kreativität beim Beweisen den Einsatz von künstlicher Intelligenz erschwere, da die Beweismethode nicht von Anfang an feststeht und erkennbar ist.

Die Arbeit an der vorliegenden VWA hat mir für meine persönliche Zukunft in zweierlei Hinsicht geholfen. Zum einen bestätigte sie mich darin, dass mir das Anfertigen von Exzerpten zwar einiges an Zeit kostet, dies jedoch eine genaue Gliederung und geordnete Arbeit ermöglicht und mir so den Arbeitsprozess erleichtert. Zum anderen zeigte sie mir, dass mich Mathematik wirklich fasziniert und interessiert und ich in meinem weiteren Leben auch weiter in diese Richtung gehen möchte. Allerdings fand ich auch heraus, dass sich das Verfassen einer mathematischen Arbeit für mich doch deutlich von dem in anderen Disziplinen unterscheidet, da ich die Genauigkeit bei Definitionen und Ähnlichem erbringen möchte und ich somit nicht nach einmaligem Lesen eines Buches oder Textes das Gemerkte ähnlich wiedergeben kann. Es verlangte mir daher einige Zeit ab, die vorliegenden Textabschnitte zuerst zu verstehen und dann möglichst genau zu beschreiben. Dabei kamen mir dann die Exzerpte zugute.

Ich möchte diese Arbeit nun mit einem Zitat von Andrew Wiles beenden, welches die Natur der Mathematik in Bezug auf mathematische Beweise zum Ausdruck bringt.

> *Manche Leute meinten, ich hätte ihnen ihr Problem weggenommen, und fragten, ob ich ihnen nicht etwas anderes dafür geben könnte. Es herrschte eine gewisse Niedergeschlagenheit. Wir haben etwas verloren, das uns so lange begleitet hat und das viele von uns in die Mathematik gezogen hat. Vielleicht ist das einfach so mit Matheproblemen. Wir müssen eben neue finden, die unsere Aufmerksamkeit fesseln.*[133]

Wenngleich ein Beweis der Mathematik immer ein Problem rauben wird, so wird es dennoch immer neue Probleme geben, die nach einem Beweis verlangen. Und genau dies ist die Ursache dafür, dass jeder Beweis zusammen mit dem dahinterstehenden Problem eine eigene Geschichte erzählt.

Um mit Andrew Wiles Worten am Ende seiner Präsentation des Beweises von „Fermats letztem Satz“ zu schließen: „Ich denke, das genügt.“[134]

---

[133] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 314.

[134] Vgl. Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).

7. Literaturverzeichnis

Courant, Richard/Robbins, Herbert: Was ist Mathematik? Heidelberg, 2010.

Czepel, Robert: „Die Mathematik baut mit Granit“. In: science.orf.at, 8.6.2018. Online verfügbar über: https://science.orf.at/stories/2917543/ (letzter Zugriff am 10.2.2019).

Dambeck, Holger: Beweis Software. Sind Computer die besseren Mathematiker? In: SPIEGEL Wissenschaft, 8.8.2015. Online verfügbar über: https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/mathematik-und-informatik-loest-software-bald-menschen-ab-a-1046794.html (letzter Zugriff, am 26.1.2020).

Dambeck, Holger: Top-Mathematiker ratlos. Niemand versteht Herrn Mochizuki. In: SPIEGEL Wissenschaft, 18.12.2015. Online verfügbar über: https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/abc-vermutung-mathematiker-verstehen-beweis-nicht-a-1068399.html (letzter Zugriff, am 29.12.2019).

Ebbinghaus, Heinz-Dieter/Flum, Jörg/Thomas, Wolfgang: Einführung in die mathematische Logik. Deutschland, 6. Aufl., 2018.

Eccles, Peter J.: An Introduction to Mathematical Reasoning. Numbers, sets and functions. Vereinigtes Königreich, 1997.

Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.19).

Fritzsche, Klaus: Mathematik für Einsteiger. Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn. Heidelberg, 5. Aufl., 2015.

Fritzsche, Klaus: Tutorium Mathematik für Einsteiger. Heidelberg, 2016.

Fuchssteiner, Jan Felix: Sieben Jahre gegrübelt. In: Die ZEIT, 6.8.1993. Online verfügbar über: https://www.zeit.de/1993/32/sieben-jahre-gegruebelt/komplettansicht (letzter Zugriff am 6.1.2020).

Garnier, Rowan/Taylor, John: 100% Mathematical Proof. Chichester, 1996.

Grieser, Daniel: Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik. Wiesbaden, 2013.

Hilgert, Ingrid/Hilgert, Joachim: Mathematik – ein Reiseführer. Heidelberg, 2012.

Hoffmann, Manfred/Gascha, Heinz/Schaschke, Horst/Gärtner, Harald: Großes Handbuch. Mathe, Physik, Chemie. München, 2004.

Hofmann, Gerald: Ingenieurmathematik für Studienanfänger. Formeln – Aufgaben – Lösungen. Wiesbaden, 2. Aufl., 2011.

Holz, Albert Violant i: Das Rätsel von Pierre de Fermat. Auf der Suche nach dem Beweis von Fermats letztem Satz. Niederlande, 2016.

Horgan, John. The Death of Proof. In: Scientific American, 1993, vol. 269 (4) S. 92–102. Online verfügbar über: https://www.jstor.org/stable/24941653?seq=1 (letzter Zugriff am 23.8.2019).

Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. A Look at the Changing Nature of Mathematical Proof. 2007. Online verfügbar über: https://archive.org/details/TheProofIsInThePudding_201810/mode/2up (letzter Zugriff am 4.2.2020).

Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. New York, 2011.

Lossau, Norbert: Vor 20 Jahren wurde Fermats Großer Satz bewiesen. In: WELT, 22.06.2013. Online verfügbar über: https://www.welt.de/wissenschaft/article117345604/Vor-20-Jahren-wurde-Fermats-Grosser-Satz-bewiesen.html (letzter Zugriff am 6.1.2020).

Meinel, Christoph/Mundhenk, Martin: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung. Wiesbaden, 2006.

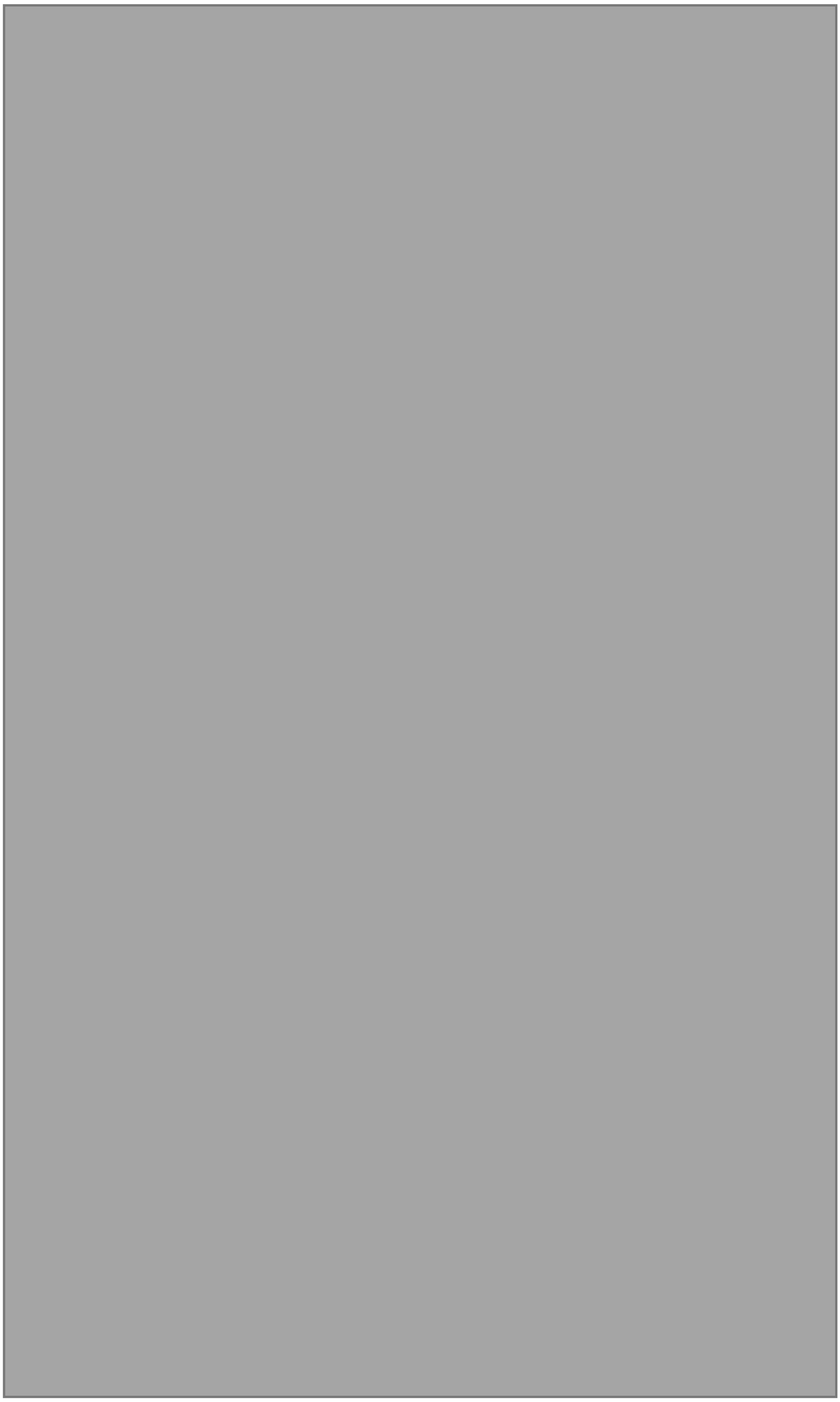
Ohlbach, Hans Jürgen/Eisinger, Norbert: Design Patterns für mathematische Beweise. Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker. Deutschland, 2017.

Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018.

8. Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

9. Anhang

9.1. A Timeline of Mathematical Proof[135]



[135] Krantz, Steven G.: The Proof is in the Pudding. The Changing Nature of Mathematical Proof. New York, 2011, S. 21-22.

9.2. Das Problem des „unvollständigen Schachbretts“[136]

9.3. Der Beweis für den „Satz von Pythagoras“[137]

[136] Polster, Burkard: Q.E.D. - Beauty in Mathematical Proof. New York, 2004. Online verfügbar über: https://archive.org/details/Q.e.d.-BeautyInMathematicalProof/mode/2up (letzter Zugriff am 10.2.2020), S. 3.

[137] Polster, Burkard: Q.E.D. - Beauty in Mathematical Proof. New York, 2004. Online verfügbar über: https://archive.org/details/Q.e.d.-BeautyInMathematicalProof/mode/2up (letzter Zugriff am 10.2.2020), S. 5. und Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 343.

9.4. „Consequence 12“

„Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes. Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que ϕ est à σ comme 1 à 1. La deuxième, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante. D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases: car elle est dans la seconde base par le premier lemme; dont par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.“[138]

9.5. Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851) in seinem Essay

„Gauss gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induktion, die durch die sogenannte Kästnersche Methode, wenn etwas für die Zahl n gilt, es auch für die Zahl n+1 zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann.“[139]

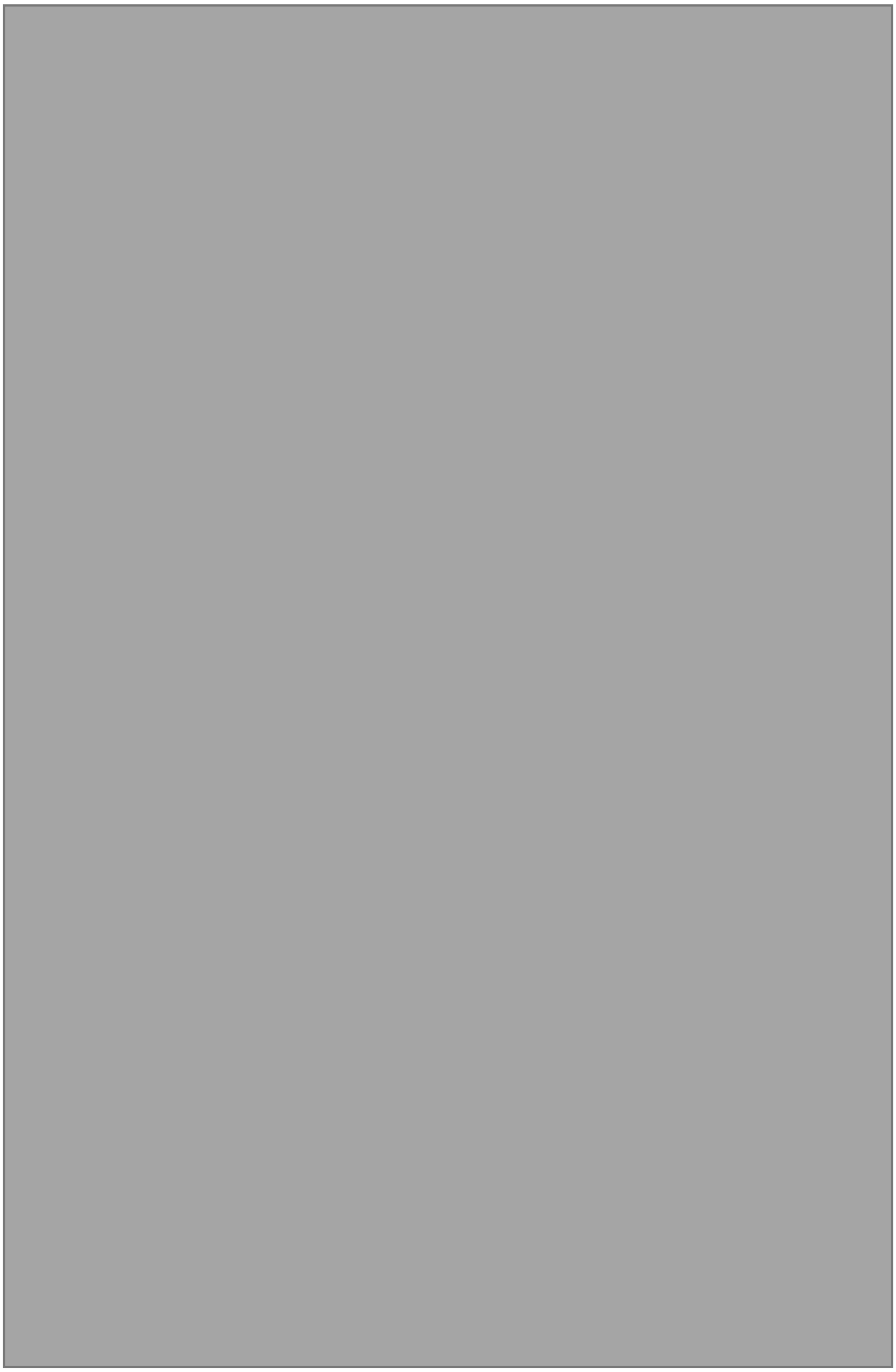
9.6. Const. Franz in „Philosophie der Mathematik“ (Leipzig 1842, S. 107)

„Der Arithmetik . . . ist die Induktion, die sogenannte kästner'sche Beweismethode wesentlich eigenthümlich. So wird von der binomischen Reihe erwiesen, daß sie richtig ist, für den Exponenten 1 und 2, und daß sie ebenso richtig ist für den Exponenten n, wenn sie für den Exponenten n−1 richtig ist; damit gilt sie allgemein.“[140]

[138] Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), hier S. 34-35.
[139] Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), hier S. 36.
[140] Felgner, Ulrich: Das Induktions-Prinzip. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2012, Vol. 114 (1), S. 23-45. Online verfügbar über: https://link.springer.com/article/10.1365/s13291-011-0032-9 (letzter Zugriff am 2.8.2019), hier S. 37.

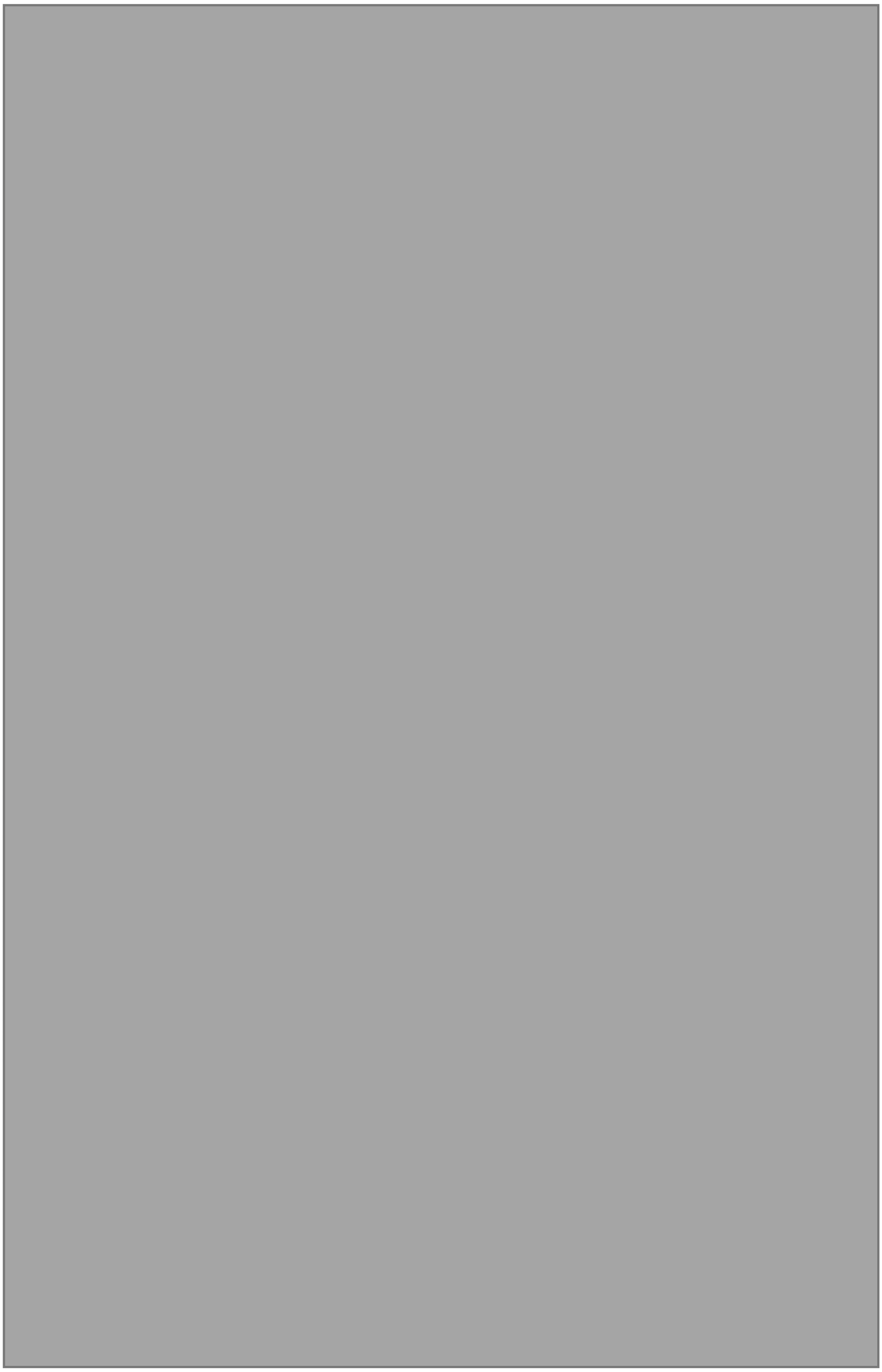
9.7. „Der letzte Satz von Fermat“

Zeitungsartikel in den „New York Times“ vom 24. Juni 1993 über den gefundenen Beweis zum „letzten Satz von Fermat“:[141]



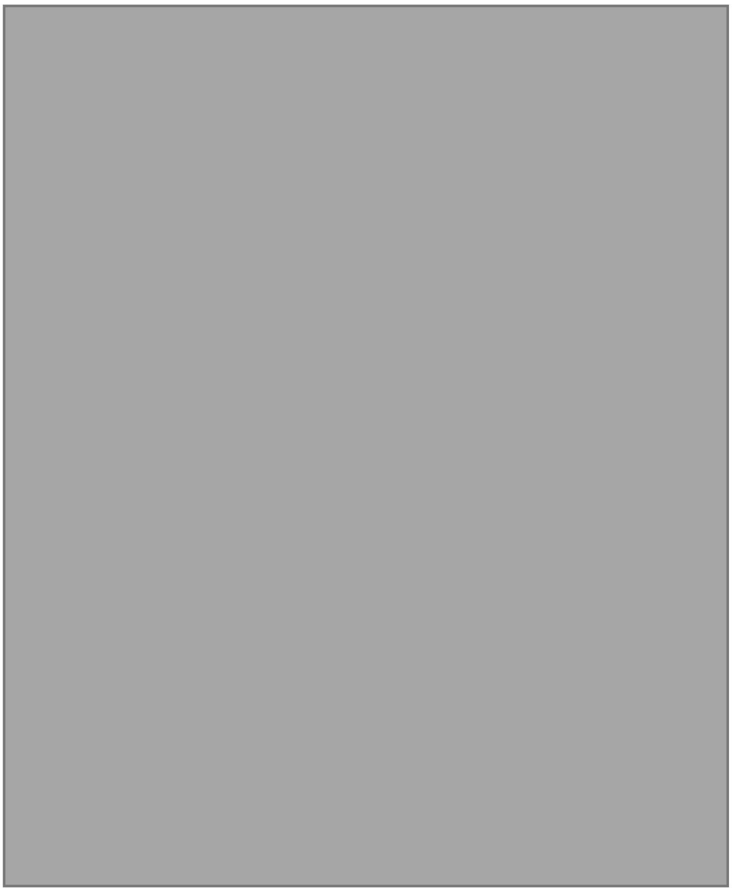
[141] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 283.

Die erste Seite von Wiles' Beweis:[142]



[142] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 309.

9.8. Mögliche Karte zum „Vier-Farben-Theorem“[143]



[143] Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. München, 20. Aufl., 2018, S. 328.

10. Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

_______________ . .   _________________________

Ort, Datum   Unterschrift

Zustimmung zur Aufstellung in der Schulbibliothek

Ich gebe mein Einverständnis, dass ein Exemplar meiner vorwissenschaftlichen Arbeit in der Schulbibliothek meiner Schule aufgestellt wird.

_______________ .   _________________________

Ort, Datum   Unterschrift