

**Welche Verbindungen gibt es zwischen der Lösung
des Großen fermatschen Satzes und dem Beginn der
Zahlentheorie in der Antike?**

Vorwissenschaftliche Arbeit



eingereicht von: Simon Hackl/8a

betreut von: Mag. Robert Schürz

eingereicht am: 23.02.2016

Abstract

Das Kernthema dieser Arbeit ist der Große fermatsche Satz, ein Postulat des im 17. Jahrhundert lebenden Hobbymathematikers Pierre de Fermat. Er behauptete beweisen zu können, dass es keine 4 natürlichen Zahlen x, y, z und n (wobei $n > 2$) gibt, für die gilt: $a^n + b^n = c^n$, ohne jedoch jemals einen konkreten Beweis zu erbringen. Wie ich im zweiten Kapitel näher erklären werde, wird in der Mathematik streng zwischen einem bewiesenen Satz und einer unbewiesenen Vermutung unterschieden. Fermat leitete seine Vermutung her, indem er den Satz des Pythagoras verallgemeinerte.

Das ist auch der Grund dafür, dass das zweite wichtige Thema meiner Arbeit der Satz des Pythagoras ist, wobei ich auf einige verschiedene Beweise dieses Satzes eingehe und allgemein die Wichtigkeit des Beweises in der Mathematik erläutere. Einen weiteren, sehr interessanten Abschnitt stellt ein längerer Beweis über einen Teil des Großen fermatschen Satzes dar, der einige grundlegende, zahlentheoretische Beweismethoden enthält.

Im letzten Kapitel befasse ich mich noch mit der weiteren Geschichte des Großen Satzes von Fermat, denn jahrhundertlang konnten nur einige Spezialfälle bewiesen werden und selbst die Erfindung des Computers half nicht, einen Beweis zu finden. Erst 1994, 350 Jahre nachdem Pierre de Fermat seine Vermutung geäußert hatte, konnte der britische Mathematiker Andrew Wiles in einem sehr langen und schwierigen Beweis das damals als schwerstes Rätsel der Mathematik geltende Problem lösen.

Vorwort

Was ist der Große fermatsche Satz? Diese Frage wurde mir im letzten Jahr des Öfteren gestellt und zu Beginn wusste ich noch nicht recht, wie ich darauf antworten sollte. "Es ist halt ein mathematischer Satz", sagte ich zu meinen Schulkollegen¹, wenn sie mich nach dem Thema meiner Vorwissenschaftlichen Arbeit fragten. Im Laufe meiner Recherchen kam ich hinter die Geschichte des Großen fermatschen Satzes. Diese enthält mehr Kapitel als die Geschichte jedes anderen mathematischen Satzes.

Der Große fermatsche Satz hat seine Wurzeln in der Antike, in der bereits bekannt war, dass bestimmte (natürliche) Zahlen, wenn man sie als Seitenlänge von Dreiecken interpretiert, ein rechtwinkeliges Dreieck ergeben. Der Satz des Pythagoras spielt für den Großen fermatschen Satz ebenso eine wichtige Rolle, wie ein antikes Buch über Zahlentheorie, in das Pierre de Fermat, der Begründer des Großen fermatschen Satzes, ganz vernarrt war. Deshalb habe ich mich bei meiner Arbeit auch mit verschiedenen Beweisen des Satzes von Pythagoras beschäftigt und zu jedem Beweis auch ein Geogebra Applet erstellt. Diese liegen der VWA, ebenso wie das von mir erstellte Programm über pythagoreische Tripel, bei.

Der Große fermatsche Satz wurde am Anfang des 17. Jahrhunderts postuliert, wo der „Fürst der Amateure“, wie Pierre de Fermat genannt wurde, diesen Satz beim Lesen eines antiken Buches über Zahlentheorie in seiner Freizeit aufstellte. Damals gab es noch keine Berufsmathematiker, Pierre de Fermat beschäftigte sich mit der Mathematik in seiner Freizeit aus reiner Neugier und purem Interesse.

Leonhard Euler, ein weiterer großer Mathematiker und vor allem Zahlentheoretiker, Sophie Germain, Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Adrien-Marie Legendre und Ernst Kummer konnten den Beweis für einen großen Teil der Zahlen ausdehnen, aber es waren immer noch unendlich viele einzelne Fälle offen, um den Großen fermatschen Satz als Ganzes zu beweisen.

¹ In der vorliegenden Arbeit wird aus Gründen der besseren Lesbarkeit die maskuline Form verwendet. Selbstverständlich sind sowohl Männer als auch Frauen angesprochen, da es auch unter den großen Mathematikern zahlreiche Frauen gab und gibt.

Anfang des 20. Jahrhunderts kam durch Gödels Unvollständigkeitssatz eine weitere Unsicherheit auf der Suche nach dem Beweis vom Großen fermatschen Satz hinzu, denn möglicherweise war dieser eine nicht beweisbare zahlentheoretische Aussage, welche es laut Gödel in der Zahlentheorie geben musste.

Im Jahr 1984, auf einem Symposium in Deutschland, wurden dann die Weichen für den Beweis des Großen fermatschen Satzes gestellt. Der deutsche Mathematiker Gerhard Frey präsentierte ein Argument, welches den Satz mit der sogenannten Taniyama-Shimura-Vermutung verband. Dieser Argumentationsgang musste noch etwas präzisiert werden, er wurde aber zwei Jahre später von Ken Ribet endgültig vollendet. Um den Großen Satz von Fermat zu beweisen, musste man nun nur mehr die Taniyama-Shimura-Vermutung beweisen, was den britischen Mathematiker Andrew Wiles auf diese Vermutung aufmerksam machte.

Es war sein Kindheitstraum, den Großen fermatschen Satz zu beweisen und nun wurde ihm eine Gelegenheit dazu geboten. Von 1986 bis 1994 befasste er sich ausschließlich mit dem Beweis der Taniyama-Shimura-Vermutung, wobei er unzählige Rückschläge hinnehmen musste, wie zum Beispiel, dass in seinem bereits fertigen Beweis 1993 eine Argumentationslücke gefunden wurde. Diese konnte er aber letztendlich schließen und sein extrem langer Beweis hielt jeder weiteren Prüfung stand. Neben dem Ruhm, ein als unlösbar geltendes Rätsel gelöst zu haben, erhielt er außerdem noch den Wolfskehl Preis, den ein deutscher Industrieller auf die Lösung des Großen fermatschen Satz ausgesetzt hatte.

Dies ist der Grund, warum mich der Große fermatsche Satz so fasziniert: weil er im Prinzip die ganze Geschichte der Mathematik und darüber hinaus noch einige interessante Geschichten, tragische Schicksale und die Arbeit der größten Mathematiker der Geschichte enthält.

Inhalt

Abstract	2
Vorwort	3
Inhalt	5
1 Einleitung.....	7
2 Kapitel 1: Pierre de Fermat und seine Formulierung des Problems	9
2.1 Pierre de Fermat.....	9
2.1.1 Biographisches	9
2.1.2 Mathematische Leistungen	9
2.2 Die Entstehung des schwersten mathematischen Problems der Welt.....	10
2.3 Die unabsichtliche Veröffentlichung	14
3 Kapitel 2: Der Satz des Pythagoras als Spezialfall des Großen Satzes von Fermat	16
3.1 Geschichtliches zum Satz des Pythagoras	16
3.1.1 Vom Satz des Pythagoras zum Großen fermatschen Satz	16
3.1.2 Pythagoreische Tripel in der Urzeit.....	17
3.1.3 Satz des Pythagoras in Indien.....	17
3.1.4 Rechnungen mit dem Satz des Pythagoras in Babylonien	19
3.1.5 Anwendungen des Satzes des Pythagoras in Ägypten.....	20
3.2 Pythagoras und die Pythagoreer	21
3.2.1 Biographisches zu Pythagoras.....	21
3.2.2 Einführung der Mathematik als Wissenschaft	23
3.2.3 Weitere Beweise des nach ihm benannten Satzes	23
3.3 Mathematisch Interessantes zum Satz des Pythagoras	24
4 Kapitel 3: Fortschritte und das Finden der Lösung	27

4.1	Zwei Beweisformen und die Irrationalität von $\sqrt{2}$	27
4.1.1	Beweisformen: unendlicher Abstieg und Widerspruch	27
4.1.2	Der Beweis, dass $\sqrt{2}$ nicht als rationale Zahl dargestellt werden kann	28
4.2	Leonhard Euler.....	28
4.2.1	Biographisches	28
4.2.2	Sein „Beweis“ des Falles $n=3$	29
4.3	Fortschritte nach Euler	46
4.4	Der Große fermatsche Satz in Verbindung mit der Taniyama-Shimura Vermutung	47
4.5	Die Lösung durch Andrew Wiles.....	47
5	Fazit	50
	Literaturverzeichnis.....	52
	Abbildungsverzeichnis.....	54
	Glossar	55

1 Einleitung

Meine Arbeit beschäftigt sich mit dem Großen fermatschen Satz, den der französische Mathematiker Pierre de Fermat im 17. Jahrhundert postuliert hat. Die Idee, dieses Thema zu wählen, kam mir, als ich das Buch „Fermats letzter Satz“ von Simon Singh las. Weil mich diese Thematik so interessierte, wollte ich einfach mehr darüber herausfinden. In der vorliegenden Arbeit kommen einige Mathematiker vor, die viel zur Lösung des Problems beigetragen haben. Um einen tieferen Einblick zu bekommen, habe ich neben den mathematischen Details auch einige ihrer Biographien kurz angeschnitten und so eingebaut, dass sie mit der Mathematik gut einhergehen. Ziel dieser Arbeit wird sein, die Entstehung und den Beweis des Großen fermatschen Satzes näher zu erläutern und außerdem seine Verbindung mit der Antike durch den Satz des Pythagoras zu untersuchen.

Das erste Kapitel dieser Arbeit befasst sich speziell mit dem Entstehen der Großen fermatschen Vermutung. Nach einer kurzen Biographie von Pierre de Fermat wird vor allem die Frage im Zentrum stehen, wie Pierre de Fermat auf dieses Problem kam und wie er es formulierte. Bereits am Beginn meiner Recherchen fand ich heraus, dass er seine Vermutung aus einem noch in der Antike entdeckten Theorem herleitete, nämlich dem Satz des Pythagoras.

Die eigentlich unabsichtliche Veröffentlichung des Großen fermatschen Satzes spielt hier auch eine interessante und wichtige Rolle.

Deshalb handelt das zweite Kapitel vom Satz des Pythagoras. Dabei steht zu Beginn die Frage im Vordergrund, welche Verbindungen es zwischen dem Großen fermatschen Satz und dem Satz des Pythagoras gibt. Danach wird der Satz des Pythagoras in Bezug auf sein Auftreten in verschiedenen Kulturen genauer untersucht. Dabei werden einige spannende Beweise des Satzes von Pythagoras vorkommen, die mithilfe von Geogebra-Anwendungen besser ersichtlich gemacht werden. Natürlich darf in diesem Zusammenhang Pythagoras nicht vergessen werden. Er ist schließlich der Namensgeber des Satzes und hat auch zu dessen Weiterentwicklung beigetragen.

Am Ende des zweiten Abschnitts meiner Arbeit werde ich mich noch näher auf einen zahlentheoretisch wichtigen Aspekt des Satzes von Pythagoras konzentrieren, nämlich pythagoreische Tripel.

Der letzte Abschnitt befasst sich zuerst mit zwei verschiedenen Formen von Beweisen anhand eines kurzen Beispiels. Danach werden diese und einige weitere Beweismethoden auf einen kleinen Teil des Großen Satzes von Fermat angewandt, um herauszufinden, wie Leonhard Euler den Großen fermatschen Satz für den **Exponenten 3** beweisen konnte. Das ist insofern interessant, da Euler der erste war, der, nach Pierre de Fermat selbst, einen Fortschritt erzielen konnte und der Lösung des Problems ein kleines Stück näher kam. Dieser Beweis wird einige Seiten lang und an manchen Stellen auch ein wenig kompliziert werden, aber im Grunde genommen ist er durchaus verständlich. Nach diesem langen Beweis wird noch die weitere Geschichte des Großen fermatschen Satzes kurz erwähnt. Dadurch soll gezeigt werden, warum der Beweis überhaupt so schwierig ist, denn immerhin konnte jahrhundertlang kein einziger Mathematiker den Großen fermatschen Satz beweisen.

Ganz am Schluss wird noch erwähnt, wie es Andrew Wiles schaffte, einen endgültigen Beweis zu erbringen.

Meiner Meinung nach ist der Große fermatsche Satz erstaunlich. Er ist etwas ganz besonderes in der Geschichte der Mathematik, ja sogar der Geschichte aller Wissenschaften. Es gibt nur ganz wenige Rätsel in der Mathematik, die die Mathematiker über so lange Zeit hinweg beschäftigt haben, wie der Große fermatsche Satz. Man muss bedenken, dass dieser zu einer Zeit formuliert wurde, als Isaac Newton noch nicht einmal geboren war. Es gibt heute kaum mehr vergleichbare Rätsel, die noch nicht gelöst wurden, vor allem nicht in den anderen Naturwissenschaften. 350 Jahre lang blieb der Große fermatsche Satz unbewiesen, und erst 1994, vor eigentlich relativ kurzer Zeit, wurde dann der Beweis erbracht. Dieser ist somit einer der aktuellsten großen Beweise in der Mathematik, da solche ja nicht alle Tage gemacht werden.

2 Kapitel 1: Pierre de Fermat und seine Formulierung des Problems

2.1 Pierre de Fermat

2.1.1 Biographisches

Pierre Fermat wurde am 17. August 1601 in der südwestfranzösischen Stadt Beaumont de Lomagne geboren. Zur Schule ging er im örtlichen franziskanischen Kloster und später konnte er die Universität besuchen, da sein Vater, Dominique Fermat, ein wohlhabender Lederhändler war.

Nach einem Jurastudium wurde Fermat 1631 Richter und Regierungsbeamter in Toulouse, wodurch sich auch sein Name zu „Pierre de Fermat“ änderte.

Aufgrund vieler Pesttoter, die es zu jener Zeit gab, stieg Pierre de Fermat im Laufe der Zeit von einer unteren Regierungsbehörde zum höchsten Strafgericht auf.

(vgl. O'Connor & Robertson, MacTutor History of Mathematics archive, 1996)



Abbildung 1: Pierre de Fermat

2.1.2 Mathematische Leistungen

Zu Fermats Zeiten, dem Beginn des 17. Jahrhunderts, war die Mathematik noch keine angesehenere Wissenschaft. Das war der Grund dafür, dass ihn seine Familie dazu anhielt, Jura zu studieren, obwohl seine Leidenschaft eigentlich der Mathematik galt. Deshalb wurde Fermat von E. T. Bell sogar „Fürst der Amateure“ genannt, eine Anspielung darauf, dass er Mathematik nur als Hobby betrieb. Pierre de Fermat beschäftigte sich so oft es ihm möglich war mit der Mathematik und machte deshalb auch viele großartige Entdeckungen.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 61)

In der Optik erklärte er das Brechungsgesetz durch die fundamentale Eigenschaft, dass Licht immer den schnellstmöglichen Weg wählt, was als fermatsches Prinzip heute noch seine Gültigkeit hat. Zusammen mit Blaise Pascal, der in Paris lebte und mit dem Fermat mittels

Briefen in Kontakt blieb, begründete er die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(vgl. O'Connor & Robertson, MacTutor History of Mathematics archive, 1996)

Newton, der zusätzlich zu seinen drei Newtonschen Gesetzen auch das dazu erforderliche, neue Teilgebiet der Mathematik, nämlich die Infinitesimalrechnung, etablierte, bediente sich laut eigener Aussage dabei auch „*Monsieur Fermats Verfahren, Tangenten zu zeichnen*“ (Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 68).

Aus diesem Grund nahm Fermat auch auf diesen wichtigen Bereich der Mathematik Einfluss. Die meiste Aufmerksamkeit schenkte er allerdings der Zahlentheorie, die sich mit den Eigenschaften der Zahlen und ihren Beziehungen zueinander beschäftigt.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 64ff)

2.2 Die Entstehung des schwersten mathematischen Problems der Welt

An einem Tag, vermutlich um das Jahr 1637, las Pierre de Fermat in seinem Exemplar der Arithmetica, einem antiken Buch über Zahlentheorie, geschrieben ca. 250 n.Chr. von dem Griechen Diophantos von Alexandria. Er war fasziniert von den Lösungen des Satzes von Pythagoras. Vor allem die Ganzzahligen hatten es ihm angetan (z.B.: $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, $8^2 + 15^2 = 17^2$, oder $7^2 + 24^2 = 25^2$). (vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 76, 85ff)

„Plötzlich, in einem Moment genialer Eingebung, der den Fürsten der Amateure unsterblich machen sollte, bildete er eine Gleichung, die der pythagoreischen zwar sehr ähnlich war, doch überhaupt keine Lösungen besaß“.

(Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 86)

Anstatt $x^2 + y^2 = z^2$, schrieb er $x^3 + y^3 = z^3$. Fermat versuchte, ganzzahlige Lösungen für diese Gleichung zu finden, doch er konnte nicht eine einzige entdecken. Das verblüffte ihn so sehr, dass er weitere Gleichungen mit höheren

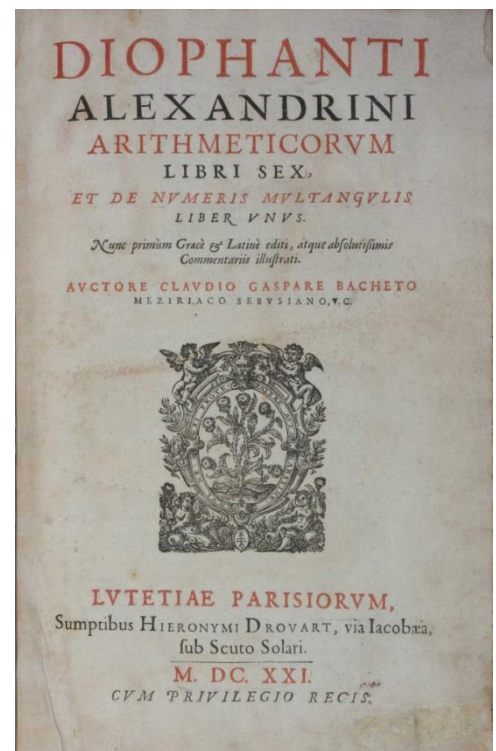


Abbildung 2: Ein Exemplar der Arithmetica, wie auch Fermat eines hatte

Exponenten, wie $x^4 + y^4 = z^4$ oder $x^5 + y^5 = z^5$ überprüfte, doch auch hier fand er keine Lösung.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 86)

„Am Ende zog er den Schluß[sic.], es gebe keine drei Zahlen, die folgende Gleichung ohne Rest erfüllen:

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{mit } n=3, 4, 5, \dots \quad ; x, y, z \in \mathbb{N}^*[\text{ad.}]$$

An den Rand seiner Ausgabe der Arithmetica (...) notierte er seine Beobachtung:

Es ist nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen.“

(Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 86f)

„Eine verblüffende Bemerkung, doch Fermat glaubte, sie beweisen zu können. Der ersten Randnotiz, in der er seine These festhielt, fügte der geniale Schelm eine weitere Bemerkung hinzu, die Generationen von Mathematikern den Schlaf rauben sollte:

Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

(Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 87)

Diese These wurde später als Große fermatsche Vermutung bekannt. Um diese zu beweisen, musste man alle Primzahlexponenten und den Exponenten $n=4$ ausschließen, da

$$x^{dn} + y^{dn} = z^{dn} \Leftrightarrow (x^d)^n + (y^d)^n = (z^d)^n \text{ ist.}$$

(vgl. Rupp & Letscher, 2008, S. 1)

Das heißt, laut den Regeln der Exponentialrechnung kann jeder beliebige Exponent in seine Faktoren zerlegt werden. Der Exponent n ist in diesem Fall immer ein Primfaktor oder 4 und deshalb muss es, wenn es die Lösung $x^{dn} + y^{dn} = z^{dn}$ gibt, auch eine Lösung:

$$X^n + Y^n = Z^n \text{ mit } X = x^d, Y = y^d \text{ und } Z = z^d \text{ geben.}$$

(vgl. Rupp & Letscher, 2008, S. 1)

Laut dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie kann jede natürliche Zahl als eindeutiges Produkt von Primfaktoren dargestellt werden und diese Eigenschaft kann hier verwendet werden. Weil wir aber für den Großen fermatschen Satz den Exponenten 2 ausgeschlossen

haben, da ja $x^2 + y^2 = z^2$, der Satz des Pythagoras, sehr wohl ganzzahlige Lösungen hat, kann der Exponent 2 in diesem Fall nicht als Faktor n (siehe obige Formel) zur Bildung des Produkts, also des ganzen Exponenten, verwendet werden. Das ist der Grund dafür, dass wir $n=4$ ebenfalls miteinbeziehen müssen, um wirklich alle möglichen Exponenten erhalten zu können.

(vgl. Möller, 2008, S. 49)

Das Problem, dass man den Großen Satz von Fermat für eine unendliche Anzahl von natürlichen Zahlen (x, y und z) und für eine unendliche Anzahl von Primzahlexponenten n beweisen muss, bleibt dadurch allerdings bestehen. Das folgt daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Diese Tatsache konnte bereits Euklid, ein griechischer Mathematiker aus dem 3. vorchristlichen Jahrhundert, zeigen, obwohl er seine Aussage anders formulierte, da er den Begriff des Unendlichen nur ungern verwendete:

Angenommen, es gäbe eine endlich lange Liste $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$ aller Primzahlen, dann müsste, laut dem Fundamentalsatz der Zahlentheorie, jede natürliche Zahl als Produkt aus diesen Primzahlen darstellbar sein. Bildet man allerdings die Zahl $Z = (P_1 * P_2 * P_3 * \dots * P_n) + 1$, so lässt diese bei Division durch alle auf der Liste stehenden Primzahlen den Rest 1. Nun ist entweder Z eine neue Primzahl, oder es gibt eine andere Primzahl, die nicht auf meiner Liste steht und Z teilt. So oder so kann diese neue Primzahl zu meiner Liste hinzugefügt werden und das Spiel beginnt von neuem. Diese Argumentation kann beliebig lange fortgesetzt werden, ohne jemals alle Primzahlen zu erhalten, deshalb gibt es unendlich viele davon.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 118f)

Arithmeticon Liber II.

61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

εἰ ἐνός. ὁ ἀρα μείζων ἔσαι εἰ ἐνός μὲν β'. δέησει ἀρα ἀριθμὸς δ' μονάδας δ' τριπλασίονας εἶναι μὲν β'. ὅτι ὑπερέχειν μὲν ἵ. τρις ἀρα μονάδας β' μὲν μὲν ἵ. ἴσαι εἶσιν εἰς ἑῶν δ' μονάσει δ'. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μὲν γ'. ἔσαι ὁ μὲν ἐλάσσων μὲν γ'. ὁ δὲ μείζων μὲν εἰ. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

IN QUÆSTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm ut quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, ut manifestum est.

QUÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit ut 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto a 2 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 — 1 Q. Communis adiciatur utrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{36}{5}$. alter vero $\frac{144}{5}$ & vtriusque summa est $\frac{180}{5}$ seu 16. & uterque quadratus est.

ὁ εἰκοσὶ πέμπτη, ἥτοι μονάδας 15. καὶ ἔστιν ἐκάτερος τετράγωνος.

Τὸν ὀπταχθέντα τετράγωνον διελὼν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάρθω δὴ τὸ 15 διελὼν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάρθω ὁ πρῶτος δυνάμειος μίας. δέησει ἀρα μονάδας 15 λείπει δυνάμειος μίας ἴσας εἶναι τετράγωνον. πλάσσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ εἰς. ὅσον δὴ ποτε λείπει ποσάτων μὲν ὅσον ἔστιν ἡ τὸ 15 μὲν πλὴν εἰς. ἔσω εἰς β' λείπει μὲν δ'. αὐτὸς ἀρα ὁ τετράγωνος ἔσαι δυνάμειος δ' μὲν 15 λείπει εἰς 15. ταῦτα ἴσα μονάσει 15 λείπει δυνάμειος μίας. κοινὴ πρὸς κείνῳ ἡ λείψας, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοία. δυνάμειος ἀρα εἰ ἴσαι ἀριθμοὶς 15. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς 15. πέμπτων. ἔσαι ὁ μὲν σὺν εἰκοσὶ πέμπτων. ὁ δὲ μὲν εἰκοσὶ πέμπτων. ὅτι οἱ δύο συντεθέντες ποιῶσι

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QUÆSTIO IX.

VERSUS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius vero quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille vero 4 Q. + 16. — 16 N. Cæterum volo utrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. — 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$ erit

Εἰς τὸ δὴ πάλιν τὸν 15 τετράγωνον διελὼν εἰς δύο τετραγώνους. τετάρθω πάλιν ἡ τὸ πρῶτου πλὴν εἰς ἐνός, ἡ ἡ τὸ εἰς εἰς ὅσον δὴ ποτε λείπει μὲν ὅσον ἔστιν ἡ τὸ διαμεινόμενον πλὴν εἰς. ἔσω δὴ εἰς β' λείπει μὲν δ'. ἔστιν γὰρ οἱ τετράγωνοι εἰς μὲν δυνάμειος μίας, ὅς δὲ δυνάμειος δ' μὲν 15 λείπει εἰς 15. βέβαιον γὰρ τὸς δύο λαίπην συντεθέντας ἴσους εἶναι μὲν 15. δυνάμειος ἀρα εἰ μὲν 15 λείπει εἰς 15 ἴσαι μὲν 15. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς 15. πέμπτων.

H. iij

2.3 Die unabsichtliche Veröffentlichung

Am 12. Februar 1665 starb Pierre de Fermat nach kurzer, schwerer Krankheit. Da er wenige Kontakte zu anderen Mathematikern gepflegt hatte, war die Gefahr groß, dass seine zahlreichen Entdeckungen für immer verloren gehen könnten. Zum Glück erkannte Clement-Samuel, der älteste Sohn von Pierre de Fermat, von welcher Signifikanz die Entdeckungen seines Vaters waren. Fünf Jahre lang trug er alle Notizen zusammen und veröffentlichte 1670 eine neue Ausgabe der Arithmetica, die 48 Anmerkungen seines Vaters enthielt.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 88ff)

Die ursprünglichen Notizen Pierre de Fermats gingen mit der Zeit verloren, doch das Buch, das sein Sohn veröffentlicht hatte, enthielt viele davon. Weil es erhalten blieb, konnten die nachfolgenden Generationen von Mathematikern mit den erstaunlichen Anmerkungen von Pierre de Fermat arbeiten.

(vgl. Singh, Fermat's last Theorem, 1996, S. 2 (Transkript))

Doch diese Anmerkungen enthielten keine Beweise, sondern nur Vermutungen und unbewiesene Entdeckungen. Fermat notierte lediglich so viel, bis er zu der Überzeugung kam, dass die entdeckte Vermutung stimmt. Über die Einzelheiten seiner Beweise kümmerte er sich nicht weiter.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 88ff)

Mit der Zeit wurde dann tatsächlich eine Anmerkung nach der anderen bewiesen und nur ganz wenige von Fermats Vermutungen stellten sich letztendlich als falsch heraus. Doch eine Randnotiz schien unantastbar. Dies ist auch der Grund dafür, dass die Große fermatsche Vermutung nach ihrem Beweis auch als „Fermats letzter Satz“ oder „Fermats letztes Theorem“ bekannt wurde, denn sie ist die letzte Behauptung Fermats, die sehr, sehr lange

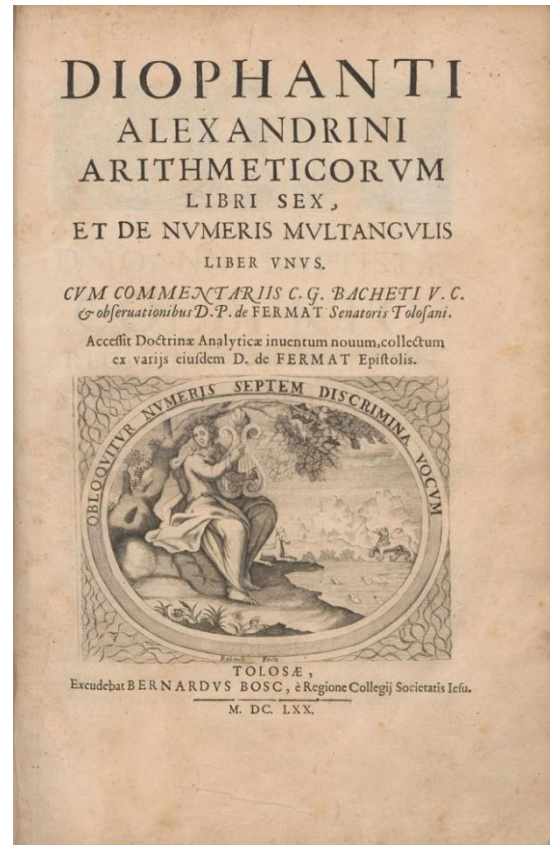


Abbildung 4: Ausgabe der Arithmetica mit Anmerkungen von Fermat

Zeit nicht als richtig oder falsch bewiesen werden konnte. Fermats letzter Satz ist unheimlich schwer zu beweisen. Der „Fürst der Amateure“ behauptete, er hätte einen Beweis. Und er fügte seiner Randnotiz eine lässige Bemerkung hinzu, der Rand sei zu schmal, um diesen aufzuschreiben. Damit versetzte er Generationen von Mathematikern in der ganzen Welt in Rage.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 88ff)

3 Kapitel 2: Der Satz des Pythagoras als Spezialfall des Großen Satzes von Fermat

3.1 Geschichtliches zum Satz des Pythagoras

3.1.1 Vom Satz des Pythagoras zum Großen fermatschen Satz

Wie im vorigen Kapitel erwähnt, entsteht der Große fermatsche Satz, indem man die Exponenten vom zweiten Grad, wie im Satz des Pythagoras, auf einen Grad ≥ 3 erhöht. Aber was besagt der Satz des Pythagoras?

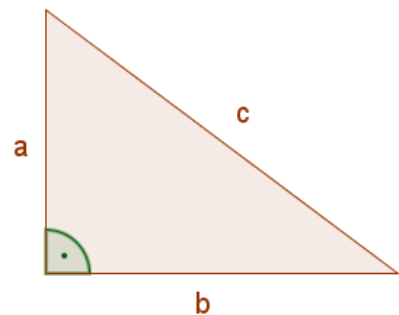


Abbildung 5: rechtwinkeliges Dreieck

Wie wir alle in der Schule gelernt haben, gilt in einem rechtwinkligen Dreieck (siehe Abb. 5), dass die Summe der Quadrate der Katheten (die Seiten, die den rechten Winkel einschließen) gleich dem Quadrat der Hypotenuse ist, wobei die Hypotenuse dem rechten Winkel gegenüber liegt. Das heißt, in einem rechtwinkligen Dreiecke mit den Katheten a , b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$. In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras, und auch die umgekehrte Beziehung ist wahr. Jedes Dreieck, bei dem für die Seiten a , b und c $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, ist automatisch ein rechtwinkeliges und hat die Seite c als Hypotenuse.

Das kann durch folgende Argumentation bewiesen werden:

Für jedes allgemeine Dreieck gilt der Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \gamma$. Damit nun $a^2 + b^2 = c^2$, muss der Term $2 * a * b * \cos \gamma = 0$ sein. Die Längen der Seiten des Dreiecks (a , b) sind größer als 0, deshalb muss $\cos \gamma = 0$ sein. Der Kosinus ist bei 90° und bei 270° null, aber die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt immer 180° , weshalb $\gamma = 90^\circ$.

Durch diesen Beweis wurde gezeigt, wenn a , b und c die Längen eines Dreiecks sind und wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann muss dieses Dreieck ein rechtwinkeliges mit c als Hypotenuse sein.

Die drei Zahlen a , b und c , die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks, sind für die Zahlentheorie vor allem dann sehr interessant, wenn a , b und c natürliche Zahlen sind. Wir nennen dieses Tripel aus natürlichen Zahlen pythagoreisches Zahlentripel oder einfach pythagoreisches Tripel.

Definition: „Ein Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen heißt pythagoreisch, falls die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist.“

(Hoehn & Huber, 2005, S. 17)

3.1.2 Pythagoreische Tripel in der Urzeit

In diesem Zusammenhang ist ein im zweiten oder dritten vorchristlichen Jahrtausend errichteter, ovalförmiger megalithischer Druidentempel bemerkenswert. Die Form des Gebäudes lässt erahnen, dass der Konstrukteur ein rechtwinkliges Dreieck benutzte, um die ovale Form der Außenmauer zu erhalten. Die drei Seiten dieses Dreiecks haben ein Verhältnis von 3:4:5 zueinander. Das ist sehr spannend, denn $(3, 4, 5)$ ist das einfachste pythagoreische Tripel. Diese Tatsache lässt darauf schließen, dass der Erbauer zumindest dieses gekannt haben könnte und dass er somit auch gewusst haben könnte, dass - wenn er ein Dreieck mit diesen Seitenlängen konstruieren würde - es dann rechtwinklig sein würde. (vgl. Gericke, 1984, S. S. 4ff)

3.1.3 Satz des Pythagoras in Indien

Die wichtigste Entdeckung der indischen Mathematiker war das Dezimalzahlensystem, das uns das Rechnen sehr erleichtert. Noch im Mittelalter musste man an die Universität gehen, um mit dem damaligen römischen Zahlensystem überhaupt dividieren zu können. Das ist heute kaum mehr vorstellbar.

(vgl. Gronau, 2009, S. 53)

Mithilfe der indischen Geometrie gibt es zwei Arten, den Satz des Pythagoras zu beweisen, wobei die Inder das erst einige Zeit nach Pythagoras konnten:

1. Der erste Beweis funktioniert folgendermaßen: Bei einem Dreieck (Abb. 6) sind die zwei Teildreiecke, die dadurch entstehen, dass man die Höhe auf die Hypotenuse zeichnet, ähnlich.

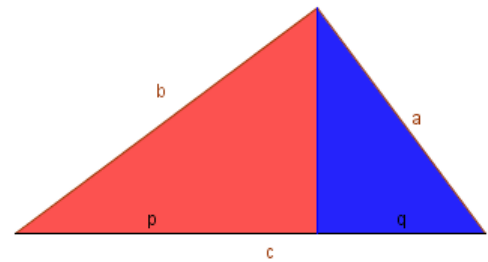


Abbildung 6: allgemeines rechtwinkeliges Dreieck für den ersten Beweis

Definition: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Innenwinkel und somit die Verhältnisse der Längen ihrer Seiten gleich sind, auch wenn sie insgesamt größer oder kleiner sind.

Die Ähnlichkeit der drei Dreiecke folgt daraus, dass die zwei Teildreiecke jeweils einen Winkel mit dem großen Dreieck gemeinsam haben, ein weiterer Winkel ist rechtwinkelig, genauso wie bei dem großen Dreieck. Daraus, dass die Summe der Winkel in einem Dreieck immer gleich ist, folgt, dass auch der dritte Winkel bei allen drei Dreiecken gleich groß sein muss. Das heißt, alle drei Dreiecke haben gleiche Winkel und sind somit ähnlich.

(vgl. Penrose, 2004, S. 31ff)

Wenn die Dreiecke ähnlich sind, müssen auch die Verhältnisse ihrer Seitenlängen gleich sein:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{q} \Rightarrow c * q = a^2 \quad \text{und} \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{p} \Rightarrow c * p = b^2$$

$$a^2 + b^2 = c * q + c * p = c * (q + p)$$

$$q + p = c \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{q.e.d.}^2$$

(vgl. Hawking, 2007, S. 12)

² Mithilfe der Geogebra Datei „1. Indischer Beweis“ kann dieser Beweis nochmals gut veranschaulicht werden.

2. Bei der zweiten Art, den Satz des Pythagoras zu beweisen, konstruiert man 4 Mal dasselbe, beliebige, rechtwinkelige Dreieck (Abb. 7), sodass die Hypothenusen außen liegen und ein Quadrat entsteht, in dessen Mitte wiederum ein kleines, unausgefülltes Quadrat liegt. Wenn man sich nun die Fläche dieses großen Quadrates ansieht, so muss sie natürlich gleich der Summe der Flächen der vier rechtwinkligen Dreiecke und des kleinen unausgefüllten Quadrates in der Mitte sein:

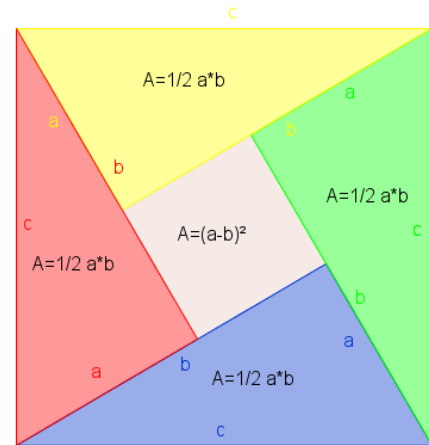


Abbildung 7 : Skizze für den zweiten Beweis des Satzes des Pythagoras

$$\begin{aligned}
 c^2 &= 4 * \frac{ab}{2} + (a - b)^2 \\
 &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \\
 &= a^2 + b^2 \quad \text{q.e.d.}^3
 \end{aligned}$$

(vgl. Gericke, 1984, S. 194f)

3.1.4 Rechnungen mit dem Satz des Pythagoras in Babylonien

In dem altbabylonischen Text „Plimpton 322“ werden bereits im zweiten Jahrtausend vor Christus, also lange vor Pythagoras, einige pythagoreische Tripel erwähnt, wobei das größte (12709,13500,18541) ist. Das lässt darauf schließen, dass die Babylonier bereits eine Formel zur Berechnung von Pythagoreischen Tripeln hatten und folglich auch mit dem Satz des Pythagoras vertraut waren.

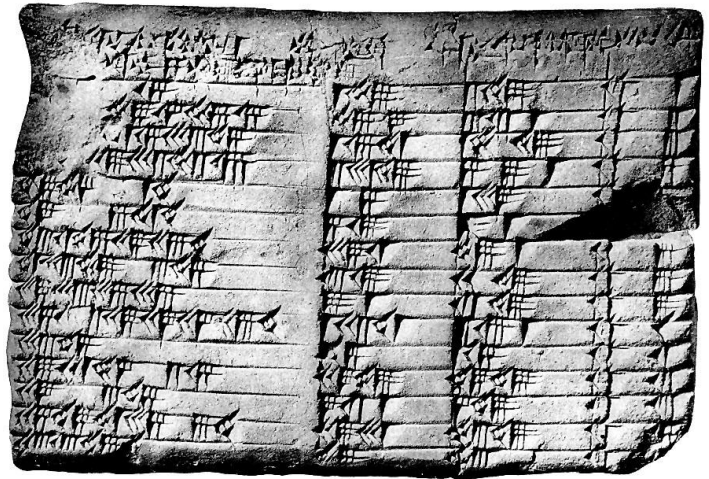


Abbildung 8: Babylonischer Text Plimpton

(Hoehn & Huber, 2005, S. 17-18, S.33 zit. n. Van der Waerden, 1964, S.126)

³ Zur besseren Veranschaulichung dieses Beweises wurde ebenfalls eine Geogebra Datei mit dem Namen „2. Indischer Beweis“ erstellt.

Diese Vermutung wird auch dadurch bekräftigt, dass viele Aufgaben in babylonischen Rechenbüchern von der Berechnung der Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke handelten. (vgl. Taschner, 2009, S. 68f)

„Eine typische Aufgabe aus einem babylonischen Rechenbuch lautet: Ein ursprünglich an einer senkrechten Wand gelehnter 30 Ellen langer Balken ist von oben 6 Ellen herabgerutscht. Wie weit hat er sich dabei waagrecht am Boden von der Wand entfernt?“

(Taschner, 2009, S. 68-69) vgl. Abb. 9⁴

Darunter wird auch gleich die Antwort gegeben:

*„30 quadriere, 900 siehst du.
6 von 30 abgezogen, 24 siehst du.
24 quadriere, 576 siehst du.
576 von 900 ziehe ab. 324 siehst du.
324 hat was als Quadratwurzel? 18.*

18 am Boden hat er sich entfernt.“

(Gericke, 1984, S. 33)⁵

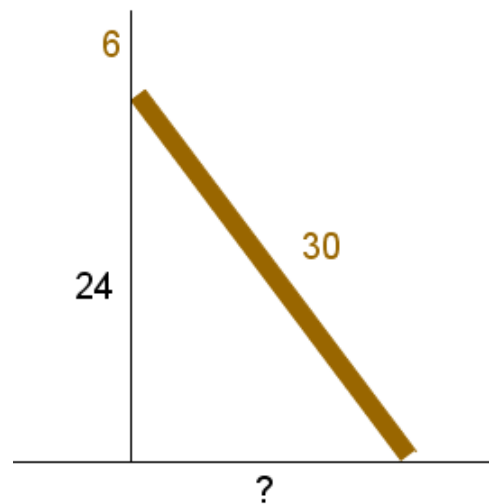


Abbildung 9: Skizze zum Beispiel aus dem babylonischen Rechenbuch

Wie dieses Beispiel zeigt, wurde im alten Babylonien genauso vorgegangen, wie wir es heute auch noch machen würden. Denn, wenn man von einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten kennt, kann man mithilfe des Satzes von Pythagoras die dritte Seite berechnen.

3.1.5 Anwendungen des Satzes des Pythagoras in Ägypten

Bereits um 7000 v. Chr. konnten die ägyptischen Bauern die jährliche Nilüberschwemmung nutzen, um ihre Felder fruchtbar zu machen. Dazu errichteten sie Deiche entlang des Nils, um diesen aufzustauen und in die Breite zu treiben, damit er seine nährstoffreichen

⁴ Hier erhält man die Zahl 24, indem man 6 von 30 subtrahiert.

⁵ Im Originaltext werden die Zahlen im Sexagesimalsystem, einem Stellenwertsystem, das anstatt 10 die Zahl 60 als Basis verwendet, angegeben. Da wir eher an das Dezimalsystem gewöhnt sind und eine Einführung in das Sexagesimalsystem an dieser Stelle zu langwierig wäre, habe ich die Zahlen in das Dezimalsystem umgewandelt.

Sedimente auf den Feldern zurücklässt.

(vgl. Beidas, Ritter, Plowman & Gaudet, 2013, S. 218)

Nach einer Überflutung musste das Land wieder vermessen und den Bauern richtig zugeteilt werden. Für diese Landvermessung und um die rechteckigen Felder richtig abgrenzen zu können, sind rechte Winkel notwendig. Diese erhielten die Ägypter vermutlich dadurch, dass sie eine Schnur, auf der im gleichen Abstand 12 Knoten geknüpft waren, so spannten, dass sich auf den drei Seiten 3, 4, beziehungsweise 5 Strecken zwischen Knoten befanden und sich das pythagoreische Tripel (3,4,5) und somit ein rechtwinkeliges Dreieck ergab (Abb. 10).

Wir wissen nicht, ob die Ägypter wussten, dass es sich exakt um einen rechten Winkel handelt, oder ob sie sich einfach auf ihre Erfahrung verließen, dass der entstandene Winkel einem Rechten für ihre Feldvermessung hinreichend nahe kommt.

Ein weiteres Anwendungsgebiet dieser rechten Winkel war der Einsatz beim Bau von Pyramiden.

(vgl. Taschner, 2009, S. 66f)

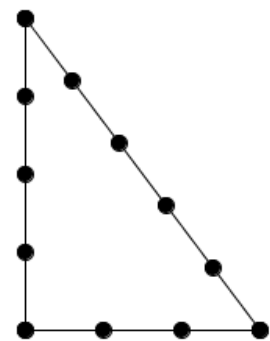


Abbildung 10: 12 Knoten so angeordnet ergeben ein rechtwinkeliges Dreieck

3.2 Pythagoras und die Pythagoreer

3.2.1 Biographisches zu Pythagoras

Pythagoras wurde um 369 v. Chr. in der Stadt Samos, die in der griechischen Kolonie Ionien lag, geboren. Deshalb wird er auch als Pythagoras von Samos bezeichnet. Er war einer der ersten großen Mathematiker der Menschheitsgeschichte und trug viel zur Entwicklung der Mathematik bei.

(vgl. O'Connor & Robertson, MacTutor History of Mathematics archive, 1999)

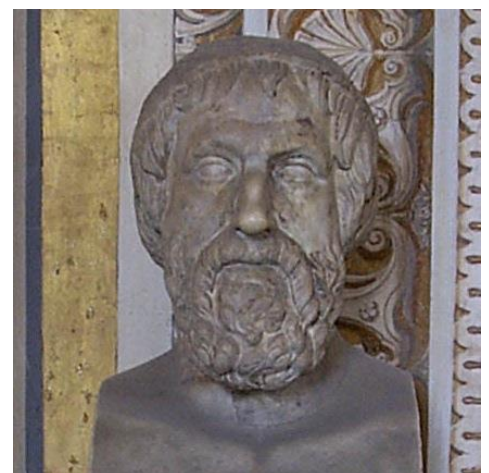


Abbildung 11: Büste des Pythagoras

Da sein Vater Händler war, konnte er sich einige Lehrer leisten, unter denen auch Thales und Anaximander waren. Thales riet ihm, nach Ägypten zu gehen, um mehr von Mathematik und Astronomie zu lernen, was Pythagoras dann auch tat. In Ägypten besuchte er einige Tempel und hatte viele Diskussionen mit Priestern. Einige der dort gepflegten Verhaltensweisen übernahm er auch in seiner später gegründeten Bruderschaft, wie Verschwiegenheit, die Gewohnheit kein Fleisch zu essen und keine aus Tieren hergestellte Kleidung zu tragen. Als um 525 v. Chr. der persische König in Ägypten einmarschierte, wurde Pythagoras gefangengenommen und nach Babylon gebracht. Das war aber nicht unbedingt zu seinem Nachteil, denn die babylonische Mathematik war zu dieser Zeit viel weiter fortgeschritten als die ägyptische. Möglicherweise machte er in Babylonien sogar mit dem nach ihm benannten Lehrsatz, dem Satz des Pythagoras, Bekanntschaft. 518 v. Chr. ging Pythagoras nach Italien, wo er in Kroton eine philosophisch-religiöse Bruderschaft mit vielen Anhängern gründete. Pythagoras war der Kopf dieses Bundes und die Mitglieder wurden Pythagoreer genannt. Sie wurden von Pythagoras in Mathematik und Philosophie unterrichtet.

(vgl. O'Connor & Robertson, MacTutor History of Mathematics archive, 1999)

Durch die Verschwiegenheit der Pythagoreer ist es sehr schwer, zwischen der Arbeit des Pythagoras und der seiner Anhänger zu unterscheiden. Sicher ist jedoch, dass die Pythagoreer große Fortschritte in der Mathematik machten. Pythagoras untersuchte Eigenschaften von Zahlen, wie zum Beispiel gerade und ungerade Zahlen, Dreieckszahlen, Quadratzahlen oder vollkommene Zahlen. Durch seine Beobachtungen in der Musik, die sich außergewöhnlich gut mit Bruchzahlen beschreiben lässt, kam er auf den Gedanken, dass sich alle Verhältnisse der Natur als Verhältnisse von ganzen Zahlen darstellen lassen, was sich aber aus heutiger Sicht als falsch herausgestellt hat (siehe Beweis: Irrationalität von $\sqrt{2}$).

(vgl. Gronau, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, 2009, S. 21ff)

Viel wichtiger war allerdings, dass die Pythagoreer die Mathematik auf ein sicheres Fundament stellten. Sie führten nämlich das Prinzip ein, dass jeder Satz in der Mathematik bewiesen werden muss. Dies stellte einen eminent wichtigen Meilenstein in der Entwicklung der Mathematik dar.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 31ff)

3.2.2 Einführung der Mathematik als Wissenschaft

Obwohl einige Kulturen noch vor Pythagoras den später nach ihm benannten Satz kannten, ist es doch gerechtfertigt, dass dieser seinen Namen trägt. Erst die Pythagoreer etablierten das Konzept des mathematischen Beweises und konnten damit für immer und ewig die Gültigkeit des Satzes von Pythagoras für alle rechtwinkligen Dreiecke beweisen.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 43f)

Beim mathematischen Beweis geht man von offensichtlich wahren oder mit Sicherheit wahren Aussagen, sogenannten Axiomen, aus. Aus diesen Axiomen leitet man dann mithilfe eines logischen Gedankenganges eine Schlussfolgerung her, die dann universelle Gültigkeit hat und als Theorem oder Satz bezeichnet werden darf. Dieses Konzept des mathematischen Beweises gilt nach wie vor, und nur, wenn eine Vermutung in dieser Art und Weise bewiesen wird, gilt sie in der Mathematik als wahr. So werden tiefe mathematische Wahrheiten hervorgebracht. Außerdem fußt die Mathematik mit diesem Konzept auf einem festen Fundament, auf das sich alle Naturwissenschaften stützen können.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 44ff)

3.2.3 Weitere Beweise des nach ihm benannten Satzes

Es gibt noch eine große Anzahl weiterer Beweise des Satzes von Pythagoras, aber zwei besonders schöne und einfache sollten an dieser Stelle noch erwähnt werden.

1. Beim Ersten gehen wir wieder von einem beliebigen, rechtwinkligen Dreieck aus (Abb. 12), das wir viermal nehmen und so anordnen, dass die Katheten nach außen und die Hypotenusen nach innen zeigen. Die Berechnung der Fläche ergibt:

$$(a + b)^2 = 4 * \left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{q.e.d.}^6$$

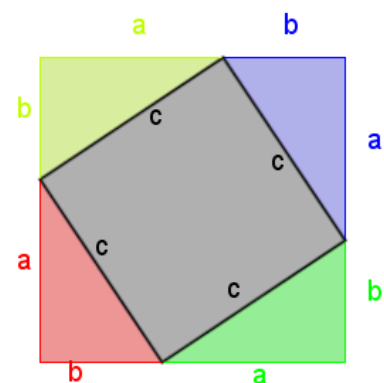


Abbildung 12: Figur für einen weiteren Beweis

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 343f)

⁶ Die Geogebra Datei „weiterer Beweis“ diht zur besseren Veranschaulichung dieses Beweises.

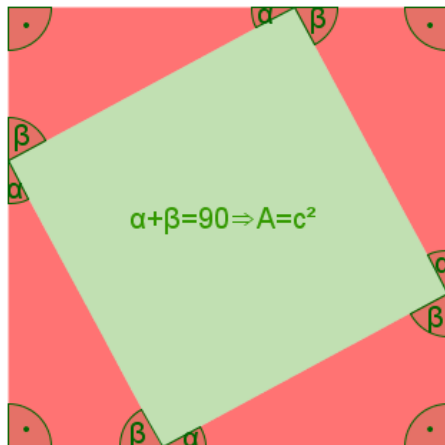


Abbildung 13: Ausgangsposition für den Beweis

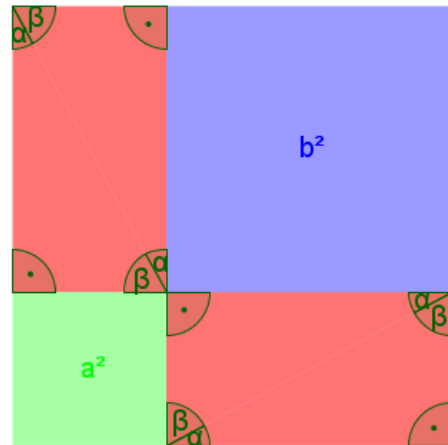


Abbildung 14: Endposition des Beweises

2. Ein anderer, rein geometrischer Beweis (Abb. 13, 14) geht davon aus, dass die zwei großen, in den Abbildungen dargestellten Quadrate den gleichen Flächeninhalt haben und sich der Flächeninhalt der vier rechtwinkligen Dreiecke durch Verschieben nicht verändert. Dann werden die rechtwinkligen Dreiecke, wie in der Geogebra-Datei „Verschiebepbeweis“ veranschaulicht, so verschoben, dass aus Abbildung 13 Abbildung 14 wird. Da sich, wie gesagt, der Flächeninhalt des Quadrats und jener der rechtwinkligen Dreiecke nicht verändert, muss die Summe der Quadrate der Katheten das Quadrat der Hypotenuse ergeben, oder anders gesagt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 343f)

3.3 Mathematisch Interessantes zum Satz des Pythagoras

Zur Berechnung von pythagoreischen Tripeln gibt es eine Formel:

$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m \geq 2, n \geq 1, m > n$ bilden

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn \text{ und } z = m^2 + n^2$$

ein pythagoreisches Tripel.

(vgl. Hoehn & Huber, 2005, S. 18)

Beweis:

$$(m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$$

$$m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$$

$$m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4: \textbf{wahre Aussage q. e. d.}$$

Da es unendlich viele verschiedene Paare von natürlichen Zahlen gibt, für die die obigen Bedingungen gelten, gibt es auch unendlich viele pythagoreische Tripel.

Unter den zusätzlichen Bedingungen, dass

1. m und n von unterschiedlicher Parität sind, das heißt, dass eine der beiden Zahlen gerade und eine ungerade ist, und dass
2. $ggT(m, n) = 1$ ist,

erhält man ein sogenanntes normiertes/primitives pythagoreisches Tripel, für das $ggT(x, y, z) = 1$ gilt.

(vgl. Ramsauer, 2004, S. 45)

Einige weitere Eigenschaften von pythagoreischen Tripeln sind:

- a. Ist (x, y, z) ein pythagoreisches Tripel, so ist auch $(tx, ty, tz) \quad \forall t \in \mathbb{N}$ ein pythagoreisches Tripel.
- b. Alle primitiven pythagoreischen Tripel können mithilfe dieser Formel erzeugt werden.
- c. Es existieren unendlich viele primitive pythagoreische Tripel.

(vgl. Ramsauer, 2004, S. 46)

- d. Jede natürliche Zahl ≥ 3 kommt in mindestens einem pythagoreischen Tripel vor.

Beweis:

Alle natürlichen Zahlen ≥ 3 sind entweder gerade oder ungerade.

Ist die gesuchte Zahl gerade, so kann man die Parameter m und n so wählen, dass $2mn$ jede gewünschte gerade Zahl ≥ 3 ergeben kann.

Ist die Zahl ungerade, so kann man sie auf jeden Fall durch $m^2 - n^2$ darstellen, denn, wenn man die Folge erzeugt, bei der man alle Quadratzahlen von den jeweils um 1 kleineren Quadratzahlen subtrahiert:

$$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2x - 1, \text{ erhält man durch } 2x - 1 \text{ alle}$$

ungeraden Zahlen ($\forall z \in \mathbb{N}_u \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad z = 2x + 1$, wobei $\mathbb{N}_u$ die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen ist)

An dieser Stelle möchte ich noch auf mein der VWA beigelegtes Programm „Pythagoreische Tripel“ verweisen, das sich mit der Berechnung von pythagoreischen und primitiven pythagoreischen Tripeln beschäftigt.

4 Kapitel 3: Fortschritte und das Finden der Lösung

4.1 Zwei Beweisformen und die Irrationalität von $\sqrt{2}$

4.1.1 Beweisformen: unendlicher Abstieg und Widerspruch

Die Beweisform des unendlichen Abstiegs wurde von Pierre de Fermat entdeckt und dazu verwendet, den Fall $n=4$, wiederum als Anmerkung an den Rand der Arithmetica, zu beweisen. Dazu nahm er an, es gäbe ein Zahlentripel (X_1, Y_1, Z_1) , für das gilt: $X_1^4 + Y_1^4 = Z_1^4$.

Durch Untersuchung der Eigenschaften dieser Zahlen konnte er zeigen, dass, wenn es (X_1, Y_1, Z_1) gibt, es auch eine Lösung mit drei kleineren Zahlen (X_2, Y_2, Z_2) geben müsste. Das würde wiederum bedeuten, dass es eine weitere Lösung mit den noch kleineren Zahlen (X_3, Y_3, Z_3) geben müsste. Diese Argumentation kann beliebig oft wiederholt werden, ohne jemals auf eine kleinste Lösung zu kommen. Da X, Y und Z jedoch ganze Zahlen sind, muss es eine kleinste Lösung geben und das bedeutet, dass es die ursprüngliche Lösung (X_1, Y_1, Z_1) nicht geben kann.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 108f)

Bei dem Beweis des Falles $n=3$ wird diese Beweisform ebenfalls vorkommen, zuerst jedoch wenden wir sie an einem einfachen Beispiel, dem Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, an. Wenn man ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 konstruiert, so hat nach dem Satz des Pythagoras die Diagonale eine Länge von $\sqrt{2}$. Den Beweis, dass diese Zahl nicht rational ist, hatte bereits Euklid in seinem 10. Buch erbracht.

(vgl. Russell, 1919, S. 80)

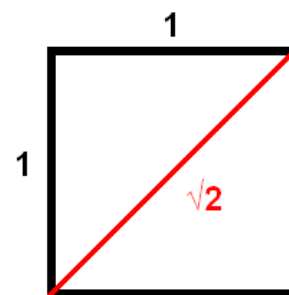


Abbildung 15: Quadrat mit Seitenlänge 1

Hier wird auch noch eine zweite wichtige Art des Beweises verwendet, der Beweis durch Widerspruch. Dabei wird am Beginn vom genauen Gegenteil dessen, was man eigentlich beweisen will, ausgegangen und an irgendeinem Punkt des Beweises ergibt sich dann ein Widerspruch. Dadurch, dass die zu beweisende Theorie nicht falsch sein kann, muss sie

richtig sein.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 71)

4.1.2 Der Beweis, dass $\sqrt{2}$ nicht als rationale Zahl dargestellt werden kann

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl, das heißt $\sqrt{2}$ lässt sich in der Form

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}^* \text{ darstellen. Durch Quadrieren beider Seiten erhält man } 2 = \frac{m^2}{n^2},$$

beziehungsweise $m^2 = 2n^2$, was bedeutet, dass m^2 eine gerade Zahl ist. Deswegen muss auch m eine gerade Zahl sein, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade. Wenn m eine gerade Zahl ist, $\exists p \in \mathbb{N} \quad m = 2p \Rightarrow m^2 = 4p^2$. Deshalb gilt auch $4p^2 = 2n^2$, beziehungsweise nach Dividieren durch 2: $2p^2 = n^2$. (vgl. Russell, 1919, S. 80)

Daraus folgt, dass auch $\frac{n}{p} = \sqrt{2}$ ist. Da jetzt n^2 eine gerade Zahl ist, kann man aus denselben Gründen wie zuvor $4q^2 = n^2$; $q \in \mathbb{N}$ setzen und erhält somit $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Das würde bedeuten, dass $\sqrt{2}$ durch eine unendliche Folge von Bruchzahlen dargestellt werden kann, wobei, von einem Folgenglied zum nächsten, Zähler und Nenner immer um die Hälfte kleiner werden. Das ist aber nicht möglich, denn wenn eine ganze Zahl durch 2 dividiert wird und deren Hälfte wieder durch 2 dividiert wird und so weiter, muss man nach endlich vielen Schritten zu einer ungeraden Zahl kommen. Alternativ könnte man noch argumentieren, dass der Bruch $\frac{m}{n}$ bereits vollständig gekürzt ist. Das bedeutet, m und n sind nicht beide gerade, wobei sich bereits durch $m^2 = 2n^2$, beziehungsweise $n^2 = 2p^2$ ein Widerspruch ergibt.

(vgl. Russell, 1919, S. 80)

4.2 Leonhard Euler

4.2.1 Biographisches

Ein weiterer großer Mathematiker war Leonhard Euler. Er wurde 1707 in Basel geboren und durfte, obwohl sein Vater für ihn ein Theologiestudium vorgesehen hatte, Mathematik studieren. Die meiste Zeit seines weiteren

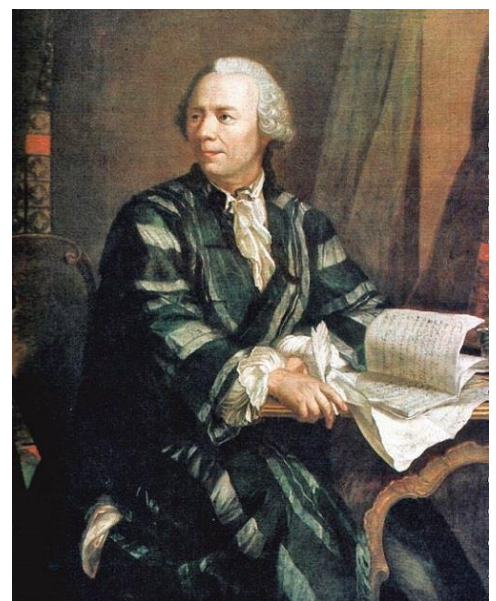


Abbildung 16: Portrait von Leonhard Euler

Lebens verbrachte er an den Königshöfen von Berlin und Sankt Petersburg. Er befasste sich mit den unterschiedlichsten Problemen. Manche davon hatten einen praktischeren Hintergrund, andere, wie sein Beweis des Falles $n=3$ des Großen fermatschen Satzes, oder die Beweise weiterer Anmerkungen aus Fermats Arithmetica, waren eher theoretischer Natur. Aus Fermats Beweis des Falles $n=4$, der ebenfalls in der mit Randnotizen gefüllten Arithmetica stand, konnte Euler die Beweisform des unendlichen Abstiegs herauslesen und benutzte diese für seinen Beweis des Falles $n=3$.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 99ff)

An dieser Stelle muss man noch anmerken, dass Euler den Beweis streng genommen nie vollständig erbrachte. Um den Fall $n=3$ komplett zu beweisen, müsste man zwei Arbeiten von ihm vereinen, was er selbst vermutlich nicht getan hat.

(vgl. Roquette, 1998, S. 6)

4.2.2 Sein „Beweis“ des Falles $n=3$

Beim Beweis selbst werden zuerst immer einige Eigenschaften der Zahlen hergeleitet und danach dazu verwendet, die Argumentation fortzusetzen. Zuerst werden allerdings noch die folgenden Lemmata, die oft vorkommen, bewiesen, um eine bessere Übersicht zu gewährleisten. Im Laufe des Beweises wird dann konkret auf sie verwiesen.

Lemma 1: Rationalitätsbedingung für $\sqrt[k]{m}$ mit $m, k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt[k]{m} = \frac{a}{b} \text{ mit } \gcd(a, b) = 1$$

Zu beweisen: $\sqrt[k]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N} \quad m = t^k$

Beweis:

Nun kann, ähnlich wie beim Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, mit k potenziert werden:

$$m = \frac{a^k}{b^k}, \text{ bzw. } a^k = m * b^k$$

Beide Seiten durch a und b dividiert, ergibt:

$$\frac{a^{k-1}}{b} = \frac{m * b^{k-1}}{a}$$

Hier müssen wir einen Satz verwenden:

„Die Repräsentanten der jeweils unendlich vielen zueinander gleichen Brüche heißen meistens Kernbrüche.

Alle zueinander gleichen Brüche sind Erweiterungen desselben Kernbruches.“

(Möller, 2008, S. 14,36)

$\frac{a^{k-1}}{b}$ stellt hier aufgrund von $ggT(a, b) = 1$ schon einen solchen Kernbruch dar

$$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{N} \quad ta^{k-1} = mb^{k-1}; tb = a$$

$$\Rightarrow ta^{k-1} = mb^{k-1} \text{ und } a^{k-1} = t^{k-1} * b^{k-1} \Rightarrow t * t^{k-1} * b^{k-1} = m * b^{k-1}$$

$$\Rightarrow m = t^k \quad \text{q.e.d.}$$

Das ist eine sowohl notwendige, als auch hinreichende Bedingung für m.

Für die Primfaktoren von m muss deshalb auch gelten, dass jeder in einer k-vielfachen Anzahl vorkommt. (vgl. Möller, 2008, S. 35-37)

Lemma 2: $\forall p, x, y \in \mathbb{Z} \quad p|x; p|y \Rightarrow p|(x \pm y)$

Beweis:

$$p|x \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad np = x$$

$$p|y \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \quad mp = y$$

$$m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n \pm m) \in \mathbb{Z}$$

$$p|p(n \pm m) \Rightarrow p|(np \pm mp) \Rightarrow p|(x \pm y) \quad \text{q.e.d.}$$

Lemma 3: $a * c \equiv b * c \text{ mod } m \Rightarrow a \equiv b \text{ mod } \frac{m}{d}$, wobei $d = ggT(m, c)$

Lemma 4: $\sqrt[n]{a * b * c} \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a, b, c) = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[n]{c} \in \mathbb{Z}$

Beweis:

Damit $\sqrt[n]{a * b * c} \in \mathbb{Z}$ ist, muss jeder Primfaktor der Zahl $a * b * c$ in einer n-vielfachen Anzahl vorkommen (vgl. **Lemma 1**). Da allerdings $ggT(a, b, c) = 1$ gilt, haben a,

b und c keine gemeinsamen Primfaktoren, also müssen bereits alle Primfaktoren von a, b und c in einer n-Vielfachen Anzahl vorkommen. Deshalb sind in diesem Fall auch die n-ten Wurzeln aus den Zahlen a, b und c ganze Zahlen (**Lemma 1**).

Satz: $X^3 + Y^3 = Z^3$ hat keine Lösung für $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$; $X, Y, Z \neq 0$

Um diesen Satz zu beweisen, ist die folgende Idee essentiell: Aus der kleinstmöglichen Lösung (X, Y, Z) dieses Satzes lässt sich durch das Ableiten einiger Eigenschaften dieser Lösung zeigen, dass es eine noch kleinere Lösung (l, m, n) geben muss. Das ist nach der Idee des unendlichen Abstiegs ein eindeutiger Widerspruch und beweist deshalb, dass es die ursprüngliche Lösung (X, Y, Z) nicht geben kann.

Beweis: umgeformt erhält man $X^3 + Y^3 - Z^3 = 0$, beziehungsweise $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$, wo Z das Vorzeichen gewechselt hat

Was später wichtig für unseren Beweis ist: Dadurch, dass $ggT(X, Y, Z) = 1$, wird automatisch das **Zahlentripel X, Y, Z mit minimalem $|Z|$** ausgewählt, das heißt, es wird vom **kleinstmöglichen Zahlentripel (X, Y, Z)** ausgegangen, das die obige erfüllt.

- I. **X, Y und Z sind paarweise teilerfremd**, d.h. $ggT(X, Y) = 1$; $ggT(X, Z) = 1$;
 $ggT(Y, Z) = 1 \Rightarrow ggT(X, Y, Z) = 1$
- II. **X^3, Y^3 und Z^3 sind paarweise verschieden**: keine zwei der drei Zahlen dürfen gleich sein
- III. **Eine der 3 Zahlen (X, Y, Z) muss gerade sein:**

Beweise:

- I. $\exists n \in \mathbb{N}^* \quad ggT(X, Y) = n$
 $X^3 + Y^3 = -Z^3 \Rightarrow n|Z$

Wenn $n > 1$: (X, Y, Z) ist nicht das kleinstmögliche Zahlentripel $\Rightarrow n = 1$ **q.e.d.**

Dasselbe Argument kann für $ggT(X, Z) = 1$ und $ggT(Y, Z) = 1$ angewendet werden

- II. Widerspruchsbeweis: $X^3 = Y^3 \Rightarrow -Z^3 = X^3 + Y^3 = 2 * X^3, Z = -\sqrt[3]{2} * X$,
 $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{N}$ (siehe **Lemma 1**) $\Rightarrow$ entweder $X \notin \mathbb{Z}$ oder $Z \notin \mathbb{Z}$ $\nrightarrow$

III. Eine gerade Zahl hoch 3 ist gerade und eine ungerade Zahl hoch 3 ist ungerade. Hier gibt es nur 2 mögliche Szenarien: $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0 \Rightarrow X^3 + Y^3 + Z^3 \equiv 0 \pmod{2}$:

- a) entweder X, Y und Z sind gerade oder
- b) zwei der drei Zahlen sind ungerade und eine ist gerade

Im ersten dieser zwei Fälle sind X, Y und Z nicht paarweise teilerfremd ⚡: es kann solange durch 2 gekürzt werden, bis man den zweiten Fall erhält $\Rightarrow$ **zwei der drei Zahlen sind ungerade und eine ist gerade** q.e.d.

In diesem Beispiel seien X, Y ungerade und Z gerade.

$$X, Y \text{ ungerade} \Rightarrow X \pm Y \text{ gerade} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} \quad 2 * a = X + Y, \quad 2 * b = X - Y$$

$$X = \frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2} = \frac{2*a}{2} + \frac{2*b}{2} = a + b$$

$$Y = \frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2} = \frac{2*a}{2} - \frac{2*b}{2} = a - b$$

Eigenschaften von a, b :

- I. $a \neq 0$
- II. $b \neq 0$
- III. $\text{ggT}(a, b) = 1$
- IV. a und b sind von verschiedener Parität

Beweise:

- I. $a = 0 \Rightarrow 2a = X + Y = 0 \Rightarrow X = -Y \Rightarrow X^3 = -Y^3; X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$
 $\Leftrightarrow -Y^3 + Y^3 + Z^3 = Z^3 = 0 \Leftrightarrow Z = 0$, was der Bedingung $Z \neq 0$ widersprechen würde ⚡
- II. $b = 0 \Rightarrow 2 * b = X - Y = 0 \Rightarrow X = Y$, was der Bedingung der paarweisen Verschiedenheit von X, Y, Z widerspricht. ⚡

$$\text{III. } \exists n \in \mathbb{N}^* \quad ggT(a, b) = n$$

$$a = \frac{X+Y}{2} \text{ und } b = \frac{X-Y}{2} \Rightarrow (\text{Lemma 2}): n \mid \frac{X+Y}{2}$$

$$n \mid \frac{X+Y}{2} \Rightarrow (\text{Lemma 2}): n \mid \left(\frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2} \right) \Rightarrow n \mid \frac{2 \cdot X}{2} \Rightarrow n \mid X$$

$$n \mid \frac{X+Y}{2} \Rightarrow (\text{Lemma 2}): n \mid \left(\frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2} \right) \Rightarrow n \mid \frac{2 \cdot Y}{2} \Rightarrow n \mid Y$$

$$\Rightarrow n = ggT(a, b) = ggT(X, Y) = 1 \Rightarrow \mathbf{ggT(a, b) = 1} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

IV. für den Beweis benötigte Bedingungen: $2a = X + Y, 2b = X - Y$; X, Y ungerade (da X^3, Y^3 ungerade)

Beweis durch Fallunterscheidung:

$$2 * a = X + Y; 2 * b = X - Y$$

$$X, Y \text{ ungerade} \Rightarrow X \equiv 1 \mod 2 \quad \Rightarrow X \equiv 1 \vee 3 \mod 4$$

$$Y \equiv 1 \mod 2 \quad \Rightarrow Y \equiv 1 \vee 3 \mod 4$$

$\Rightarrow$ es gibt 4 mögliche Fälle:

1.Fall: $X \equiv 1 \mod 4, Y \equiv 1 \mod 4$

$$2 * a = X + Y \Rightarrow 2 * a \equiv 1 + 1 \mod 4$$

$$2 * a \equiv 2 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) a \equiv 1 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{a \text{ ungerade}}$$

$$2 * b = X - Y \Rightarrow 2 * b \equiv 1 - 1 \mod 4$$

$$2 * b \equiv 0 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) b \equiv 0 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{b \text{ gerade}}$$

2.Fall: $X \equiv 1 \mod 4, Y \equiv 3 \mod 4$

$$2 * a = X + Y \Rightarrow 2 * a \equiv 1 + 3 \mod 4$$

$$2 * a \equiv 4 \equiv 0 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) a \equiv 0 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{a \text{ gerade}}$$

$$2 * b = X - Y \Rightarrow 2 * b \equiv 1 - 3 \mod 4$$

$$2 * b \equiv -2 \equiv 2 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) \quad b \equiv 1 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{b \text{ ungerade}}$$

$$\underline{\text{3.Fall:}} \quad X \equiv 3 \mod 4, Y \equiv 1 \mod 4$$

$$2 * a = X + Y \Rightarrow 2 * a \equiv 3 + 1 \mod 4$$

$$2 * a \equiv 4 \equiv 0 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) \quad a \equiv 0 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{a \text{ gerade}}$$

$$2 * b = X - Y \Rightarrow 2 * b \equiv 3 - 1 \mod 4$$

$$2 * b \equiv 2 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) \quad b \equiv 1 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{b \text{ ungerade}}$$

$$\underline{\text{4.Fall:}} \quad X \equiv 3 \mod 4, Y \equiv 3 \mod 4$$

$$2 * a = X + Y \Rightarrow 2 * a \equiv 3 + 3 \mod 4$$

$$2 * a \equiv 6 \equiv 2 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) \quad a \equiv 1 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{a \text{ ungerade}}$$

$$2 * b = X - Y \Rightarrow 2 * b \equiv 3 - 3 \mod 4$$

$$2 * b \equiv 0 \mod 4$$

$$(\text{Lemma 3:}) \quad b \equiv 0 \mod 2 \quad \Rightarrow \underline{b \text{ gerade}}$$

In allen 4 möglichen Fällen sind a, b von verschiedener Parität $\Rightarrow a, b$ sind von verschiedener Parität **q.e.d.**

$$\text{Deshalb ist:} \quad -Z^3 = X^3 + Y^3$$

$$= (a + b)^3 + (a - b)^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= 2a^3 + 6ab^2$$

$$-Z^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$$

Eigenschaften von a,b:

- I. $a^2 + 3b^2$ ist ungerade und Z ist gerade: $8|Z^3 \Rightarrow 8|(2a(a^2 + 3b^2)) \Rightarrow 8|2a$
- II. a ist gerade
- III. b ist ungerade
- IV. $ggT(2a, a^2 + 3b^2) = 1 \vee 3$

Beweise:

- I. durch Fallunterscheidung:

für Beweis benötigte Bedingungen: a, b von verschiedener Parität

Beweis:

$\exists$ 2 mögliche Fälle:

1.Fall:

a: gerade: $a \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow a^2 \equiv 0 \mod 2$

b: ungerade: $b \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow 3b^2 \equiv 3 \equiv 1 \mod 2$

$$a^2 + 3b^2 \equiv 0 + 1 \mod 2$$

$$a^2 + 3b^2 \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow \underline{a^2 + 3b^2 \text{ ist ungerade}}$$

2.Fall:

a: ungerade: $a \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \mod 2$

b: gerade: $b \equiv 0 \mod 2 \Rightarrow 3b^2 \equiv 0 \mod 2$

$$a^2 + 3b^2 \equiv 1 + 0 \mod 2$$

$$a^2 + 3b^2 \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow \underline{a^2 + 3b^2 \text{ ist ungerade}}$$

$a^2 + 3b^2$ ist in allen beiden möglichen Fällen ungerade

$\Rightarrow a^2 + 3b^2$ ungerade **q.e.d.**

- II. $a^2 + 3b^2$ ist ungerade, Z ist gerade: $8|Z^3 \Rightarrow 8|(2a(a^2 + 3b^2)) \Rightarrow 8|2a$
 $\Rightarrow a$ gerade **q.e.d.**

- III. a gerade und a, b von verschiedener Parität $\Rightarrow b$ ungerade **q.e.d.**

IV. Bedingungen: $a^2 + 3b^2$ ungerade, $ggT(a, b) = 1$

Beweis:

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad ggT(2a, a^2 + 3b^2) = n$$

$$2 \nmid (a^2 + 3b^2) \Rightarrow n \neq 2$$

$$n \mid 2a, n \neq 2 \Rightarrow n \mid a \Rightarrow n \mid a^2$$

$$n \mid (a^2 + 3b^2), n \mid a^2 \Rightarrow n \mid 3b^2;$$

$$n \mid 3b^2 \Rightarrow \exists 2 \text{ Möglichkeiten: } n \mid 3 \vee n \mid b^2$$

$$\text{a. } n \mid 3 \Rightarrow n = 1 \vee 3$$

$$\text{b. } n \mid b^2 \Rightarrow n \mid b \Rightarrow n = 1 \quad \text{da } n \mid a, n \nmid b \text{ und } ggT(a, b) = 1$$

$$\Rightarrow n = 1 \vee 3 \quad \text{q.e.d.}$$

In weiterer Folge wird zwischen diesen beiden Fällen unterschieden und dadurch, dass in beiden Fällen gezeigt wird, dass die Lösung (X, Y, Z) eine kleinere Lösung (l, m, n) beinhaltet, wird der fermatsche Satz für den Fall $n=3$ bewiesen.

1.Fall: $ggT(2a, a^2 + 3b^2) = 1$

$Z^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$ mit $ggT(2a, a^2 + 3b^2) = 1 \Rightarrow (\text{Lemma 4}): 2a \text{ und } a^2 + 3b^2 \text{ können als dritte Potenzen dargestellt werden } (r, s \in \mathbb{Z}):$

$$2a = r^3$$

$$a^2 + 3b^2 = s^3$$

Eigenschaften von a und s:

$$\text{I. } 3 \nmid a$$

$$\text{II. } s \text{ ist ungerade}$$

$$\text{III. } 3 \nmid s$$

Beweise:

I. durch Widerspruch:

$$3|a \Rightarrow 3|a^2; 3|3b^2 \text{ und } 3|a^2 \Rightarrow 3|(a^2 + 3b^2)$$

$$3|a \Rightarrow 3|2a$$

$$3|(a^2 + 3b^2), 3|2a \Rightarrow ggT(2a, a^2 + 3b^2) \geq 3 \text{ ⚡}$$

II. $a^2 + 3b^2$ ist ungerade

III. $3 \nmid a, 3|3b^2 \Rightarrow 3 \nmid (a^2 + 3b^2) \Rightarrow 3 \nmid s^3 \Rightarrow 3 \nmid s \quad \mathbf{q.e.d.}$

Nun nehmen wir eine Tatsache an, deren Richtigkeit prinzipiell bewiesen ist (siehe (Ramsauer, 2004, S. 54ff)). Dieser Beweis ist jedoch sehr kompliziert und er würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen:

Lemma 5: Sei s ungerade mit $s^3 = a^2 + 3b^2$ und $ggT(a, b) = 1$

Dann gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit:

$$s = u^2 + 3v^2$$

$$a = u(u^2 - 9v^2)$$

$$b = 3v(u^2 - v^2)$$

Dadurch neu erhaltene Eigenschaften:

I. **Lemma 6:** $ggT(u, v) = 1$

II. u, v sind von **verschiedener Parität**

a) $u^2 - 9v^2$ ist ungerade

b) u ist gerade

c) v ist ungerade

III. $u \neq 0$

IV. $v \neq 0$

V. $3 \nmid u$

VI. $ggT(u, u + 3v, u - 3v) = 1$

VII. $u \pm 3v$ ungerade

Beweise:

I. Bedingungen: $a = u(u^2 - 9v^2)$; $b = 3v(u^2 - v^2)$

Beweis: $\exists p_x \in \mathbb{N}^* \quad ggT(u, v) = p_x$

$$p_x | u, p_x | v \Rightarrow \frac{u^2}{p_x} \in \mathbb{Z}, \frac{v^2}{p_x} \in \mathbb{Z}$$

$$a = u(u^2 - 9v^2) = u \left(p_x \left(\frac{u^2}{p_x} - 9 \frac{v^2}{p_x} \right) \right) = p_x * u \left(\frac{u^2 - 9v^2}{p_x} \right)$$

$$b = 3v(u^2 - v^2) = 3v \left(p_x \left(\frac{u^2}{p_x} - \frac{v^2}{p_x} \right) \right) = p_x * 3v \left(\frac{u^2 - v^2}{p_x} \right)$$

$$ggT(a, b) = ggT \left(p_x * u \left(\frac{u^2 - 9v^2}{p_x} \right), p_x * 3v \left(\frac{u^2 - v^2}{p_x} \right) \right) \geq p_x$$

$$ggT(a, b) = 1 \Rightarrow p_x \leq 1 \Rightarrow p_x = 1, \text{ da } \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad ggT(a, b) \geq 1$$

$$\Rightarrow ggT(u, v) = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

II. Bedingungen: b ist ungerade, $ggT(u, v) = 1$, $b = 3v(u^2 - v^2)$

Beweis:

u, v sind nicht beide ungerade: $b = 3v(u^2 - v^2)$, $u^2 - v^2$ wäre gerade

$\Rightarrow b$ gerade ⚡

u, v sind aber auch nicht beide gerade, da $ggT(u, v) = 1$

$\Rightarrow u, v$ sind **von verschiedener Parität** **q.e.d.**

a) u, v von verschiedener Parität $\Rightarrow u^2, 9v^2$ von verschiedener Parität

$\Rightarrow u^2 - 9v^2$ ist ungerade **q.e.d.**

b) a ist gerade, $a = u(u^2 - 9v^2)$, $(u^2 - 9v^2)$ ist ungerade

$\Rightarrow u$ ist gerade **q.e.d.**

c) u, v von verschiedener Parität $\Rightarrow v$ ist ungerade **q.e.d.**

III. $a = u(u^2 - 9v^2)$, $a \neq 0 \Rightarrow u \neq 0$ **q.e.d.**

IV. 0 ist gerade, v ist ungerade $\Rightarrow v \neq 0$ **q.e.d.**

V. $3 \nmid a \Rightarrow 3 \nmid u$ **q.e.d.**

VI. für den Beweis benötigte Bedingungen: $ggT(u, v) = 1$, u ist gerade, v ist ungerade,
 $3 \nmid u$

Beweis:

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad ggT(u, u \pm 3v) = n$$

$$n|u, n|u \pm 3v \Rightarrow n|\pm 3v$$

$$\text{wenn } n > 1: n \nmid v \text{ (da } ggT(u, v) = 1, n|u) \Rightarrow n|3 \Rightarrow n \leq 3$$

$$n \neq 3 \quad \text{da } n|u \text{ und } 3 \nmid u$$

$$n \neq 2 \quad \text{da } n|\pm 3v \text{ und } v \text{ ist ungerade}$$

$$\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \mathbf{ggT(u, u \pm 3v) = 1}$$

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad ggT(u + 3v, u - 3v) = m$$

$$(\text{Lemma 2}): \quad m|(u + 3v \pm (u - 3v)) \Rightarrow m|2u, m|6v$$

$$u \text{ gerade, } v \text{ ungerade: } \mathbf{u \pm 3v \text{ ungerade}}, m|u \pm 3v \Rightarrow m \neq 2$$

$$(m|u, 3 \nmid u) \Rightarrow m \neq 3$$

$$\Rightarrow m|u, m|v$$

$$ggT(u, v) = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \mathbf{ggT(u + 3v, u - 3v) = 1}$$

$$ggT(u, u \pm 3v) = 1, ggT(u + 3v, u - 3v) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{ggT(u, u + 3v, u - 3v) = 1} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

VII. u gerade, v ungerade $\Rightarrow \mathbf{u \pm 3v \text{ ungerade}} \quad \mathbf{q.e.d.}$

$$r^3 = 2a = 2u(u^2 - 9v^2) = 2u(u + 3v)(u - 3v)$$

$$u \pm 3v \text{ ungerade} \Rightarrow 2 \nmid u \pm 3v \Rightarrow ggT(2u, u + 3v, u - 3v) = 1$$

$$(\text{vgl.: } ggT(u, u + 3v, u - 3v) = 1)$$

$\Rightarrow$ (Lemma 4): $\exists n, l, m \in \mathbb{Z}$, für die gilt:

$$\begin{aligned} 2u &= -n^3 \\ u - 3v &= l^3 \\ u + 3v &= m^3 \end{aligned}$$

Eigenschaften von n, m, l

- I. $n, m, l \neq 0$
- II. n, m, l paarweise teilerfremd
- III. $l^3 + m^3 + n^3 = 0$

Beweise:

- I. Bedingungen: $3 \nmid u$

Beweis durch Widerspruch:

$$n = 0 \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid 2u \Rightarrow 3 \mid u \text{ ⚡}$$

$$m = 0, l = 0 \Rightarrow 3 \mid m, 3 \mid l \Rightarrow 3 \mid (u \pm 3v); 3 \mid 3v \Rightarrow 3 \mid u \text{ ⚡}$$

- II. $u \pm 3v$ ungerade $\Rightarrow ggT(2u, u + 3v, u - 3v) = 1 \Rightarrow ggT(l, m, n) = 1$ **q.e.d.**
- III. $l^3 + m^3 + n^3 = u - 3v + u + 3v - 2u = 0$

In diesem Fall ist **n gerade**.

Dies ist genau dieselbe Ausgangslage wie zu Beginn des Beweises. Nun bleibt im Sinne der Methode des unendlichen Abstiegs noch zu zeigen, dass $|n| < |Z|$

$$\begin{aligned} Z^3 &= 2a * (a^2 + 3b^2) \Rightarrow & |Z|^3 &= |2a(a^2 + 3b^2)| \\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^* \quad a^2 + 3b^2 &\in \mathbb{N}: & &= |2a|(a^2 + 3b^2) \\ 2a &= 2u(u^2 - 9v^2): & &= |2u(u^2 - 9v^2)|(a^2 + 3b^2) \\ 2u &= -n^3: & &= |-n^3(u^2 - 9v^2)|(a^2 + 3b^2) \end{aligned}$$

zu beweisen: $|Z|^3 = |-n^3(u^2 - 9v^2)|(a^2 + 3b^2) > 3n^3$

benötigte Bedingungen: $a, b \neq 0$; $u, v \neq 0$, u gerade, v ungerade; $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$

Beweis:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^* \quad a^2 + 3b^2 > 3$$

$$u^2 - 9v^2 \neq 0:$$

$$u^2 - 9v^2 = 0 \Rightarrow u^2 = 9v^2, \text{ aber } u \text{ ist gerade und } v \text{ ist ungerade} \Rightarrow u^2 - 9v^2 \neq 0 \\ \Rightarrow u^2 - 9v^2 \in \mathbb{Z}^*$$

$$\begin{aligned} |Z^3| &= |-n^3(u^2 - 9v^2)|(a^2 + 3b^2) \\ &> |-n^3(u^2 - 9v^2)| * 3 \\ &\geq |\pm n^3| * 3 \\ &= 3|n^3| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |Z|^3 > 3|n^3| > |n^3|$$

$\Rightarrow |Z|^3 > |n|^3 \Rightarrow |Z| > |n|$: Dies ist aber ein Widerspruch zur zu Beginn geforderten Minimalität von $|Z|$. Im Sinne des unendlichen Abstiegs wurde der erste Fall bewiesen, da das Zahlentripel (l, m, n) kleiner ist als das Tripel (X, Y, Z) .

2.Fall: $ggT(2a, a^2 + 3b^2) = 3 \Rightarrow 3|2a \Rightarrow 3|a$

$$\exists c \in \mathbb{Z}^* \quad a = 3c$$

Eigenschaften von b, c :

- I. $3 \nmid b$
- II. c ist gerade
- III. $3c^2 + b^2$ ist ungerade
- IV. $3 \nmid b^2 + 3c^2$
- V. $ggT(c, b) = 1$
- VI. $c \neq 0$
- VII. $ggT(18c, 3c^2 + b^2) = 1$

Beweise:

- I. $3|a, a, b$ sind teilerfremd $\Rightarrow 3 \nmid b$ **q.e.d.**
- II. a ist gerade
- III. c ist gerade, b ist ungerade $\Rightarrow 3c^2 + b^2$ ist ungerade **q.e.d.**
- IV. $3 \nmid b \Rightarrow 3 \nmid b^2, 3|3c^2 \Rightarrow 3 \nmid b^2 + 3c^2$ **q.e.d.**
- V. $ggT(a, b) = 1, a = 3c, 3 \nmid b$
- VI. $a \neq 0$
- VII. benötigte Bedingungen: $ggT(c, b) = 1, c$ gerade, b ungerade, $3c^2 + b^2$ ungerade,
 $3 \nmid b^2 + 3c^2$

Beweis:

$$\exists x \in \mathbb{N}^* \quad ggT(18c, b^2 + 3c^2) = x$$

$$b^2 + 3c^2 \text{ ungerade} \Rightarrow x \neq 2$$

$$3 \nmid b^2 + 3c^2 \Rightarrow x \neq 3$$

Die Primfaktorzerlegung von 18: $18 = 2 * 3 * 3 \Rightarrow x \neq 18$, da jeder Primfaktor von einem ggT zweier Zahlen die beiden Zahlen teilen muss

$$\Rightarrow ggT(18c, b^2 + 3c^2) = ggT(c, b^2 + 3c^2)$$

$$ggT(c, b) = 1 \Rightarrow \forall T_c \in \text{Menge aller Teiler von } c \quad T_c \nmid b \Rightarrow \forall T_c \quad T_c \nmid b^2$$

$$\forall T_c \quad T_c | 3c^2, \forall T_c \quad T_c \nmid b^2 \Rightarrow \forall T_c \quad T_c \nmid b^2 + 3c^2$$

$$\Rightarrow ggT(18c, 3c^2 + b^2) = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

$$-Z^3 = X^3 + Y^3$$

$$= (a + b)^3 + (a - b)^3$$

$$= (3c + b)^3 + (3c - b)^3$$

$$= 27c^3 + 27c^2b + 9cb^2 + b^3 + 27c^3 - 27c^2b + 9cb^2 - b^3$$

$$= 54c^3 + 18cb^2$$

$$= 18c(3c^2 + b^2)$$

$-Z^3 = 18c(3c^2 + b^2)$, $ggT(18c, 3c^2 + b^2) = 1 \Rightarrow$ (Lemma 4): $18c$ und $3c^2 + b^2$ können als dritte Potenzen $r, s \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden mit:

$$\begin{aligned} 18c &= r^3 \\ 3c^2 + b^2 &= s^3 \end{aligned}$$

Eigenschaften von s, r :

I. s ungerade

II. $3|r$

Beweise:

I. $3c^2 + b^2$ ungerade

II. $3|18c \Rightarrow 3|r^3 \Rightarrow 3|r$ q.e.d.

Nach **Lemma 5** gibt es (wenn s ungerade ist unter den Bedingungen $s^3 = b^2 + 3c^2$ und $ggT(c, b) = 1$) $u, v \in \mathbb{Z}$ mit:

$$\begin{aligned} s &= u^2 + 3v^2 \\ b &= u(u^2 - 9v^2) \\ c &= 3v(u^2 - v^2) \end{aligned}$$

Eigenschaften von u, v :

I. u ist ungerade

II. v ist gerade

III. $v \neq 0$

IV. $ggT(u, v) = 1$

V. $ggT(2v, u + v, u - v) = 1$

Beweise:

- I. b ist ungerade
- II. b ist ungerade, u ist ungerade $\Rightarrow v$ ist gerade **q.e.d.**
- III. $c \neq 0$
- IV. **Lemma 6** mit $a = b = u(u^2 - 9v^2)$, $b = c = 3v(u^2 - v^2)$ und $ggT(b, c) = 1$
- V. benötigte Bedingungen: $ggT(u, v) = 1$, u ungerade, v gerade

Beweis:

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad ggT(2v, u \pm v) = n$$

$$\Rightarrow n|2v, n|u \pm v$$

$n \neq 2$, da $u \pm v$ ungerade ist

$$n|u, n|u \pm v \Rightarrow (\text{Lemma 1}): n|(u - (u - v)) \Rightarrow n|v$$

$$n|u, n|v; \text{ aber } ggT(u, v) = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \mathbf{ggT(2v, u \pm v) = 1}$$

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad ggT(u + v, u - v) = m$$

$$\Rightarrow m|u + v, m|u - v \Rightarrow (\text{Lemma 1}): m|(u + v + (u - v)), m|(u + v - (u - v))$$

$$\Rightarrow m|2u, m|2v$$

$m \neq 2$: $u \pm v$ ist ungerade

$$\Rightarrow m|u, m|v, \text{ aber } ggT(u, v) = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \mathbf{ggT(u + v, u - v) = 1}$$

$$ggT(2v, u \pm v) = 1, ggT(u + v, u - v) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{ggT(2v, u + v, u - v) = 1} \quad \mathbf{q.e.d.}$$

$$r^3 = 18c = 18 * 3v(u^2 - v^2) = 54v(u + v)(u - v)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{3}\right)^3 = 2v(u + v)(u - v)$$

$\Rightarrow (\text{Lemma 3}): 2v, u + v, u - v$ sind dritte Potenzen:

$$2v = -n^3$$

$$u + v = l^3$$

$$u - v = -m^3$$

Eigenschaften:

- I. $l^3 + m^3 + n^3 = 0$
- II. n ist gerade
- III. $n \neq 0$
- IV. $l, m \neq 0$

Beweise:

- I. $l^3 + m^3 + n^3 = -(2v) + u + v - (u - v) = 0$
- II. $2|n^3 \Rightarrow 2|n$ **q.e.d.**
- III. $v \neq 0$
- IV. u, v von verschiedener Parität $\Rightarrow u \pm v$ ungerade und 0 ist gerade
 $\Rightarrow l, m \neq 0$ **q.e.d.**

Dies ist wiederum genau dieselbe Ausgangslage wie am Ende von Fall 1. Nun bleibt noch zu zeigen, dass $|n| < |Z|$:

$$\begin{aligned}
 |Z|^3 &= 18 * |c| * (3c^2 + b^2) \\
 &= 54|v(u^2 - v^2)|(3c^2 + b^2) && (c = 3v(u^2 - v^2)) \\
 &= 27|-n^3||u^2 - v^2|(3c^2 + b^2) && (-n^3 = 2v) \\
 &> 81|-n^3||u^2 - v^2| && \forall b, c \in \mathbb{Z} \quad 3c^2 + b^2 > 3 \\
 &> 81|n^3||u^2 - v^2| && (u, v \text{ von verschiedener Parität} \Rightarrow u^2, v^2 \text{ von} \\
 &&& \text{verschiedener Parität} \Rightarrow u^2 \neq v^2 \Rightarrow u^2 - v^2 \neq 0) \\
 &> 81|n|^3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |Z^3| > 81|n|^3 > |n|^3 \Rightarrow |Z|^3 > |n|^3 \Rightarrow |Z| > |n|$$

Dies ist wiederum ein Widerspruch zur zu Beginn geforderten Minimalität von $|Z| \Rightarrow$ im zweiten Fall wurde wie im ersten mithilfe des unendlichen Abstiegs ein Widerspruch hervorgerufen.

Für die zwei möglichen Fälle wurde nun ein Widerspruch gefunden.

$\Rightarrow$ der Große fermatsche Satz ist für den Fall $n=3$ wahr:

$$\nexists X, Y, Z \in \mathbb{N}^* \quad X^3 + Y^3 = Z^3$$

gesamter Beweis: (vgl. Ramsauer, 2004, S. 52ff)

4.3 Fortschritte nach Euler

„Fermat (1601-1665) 1637 Problemstellung; Beweis für $n=4$ und später andeutungsweise für $n=3$

Euler (1701-1783) $n=3$: Beweis unvollständig

Gauß (1777-1850) $n=3$: vollständiger Beweis

Dirichlet (1805-1859) $n=5$: 1825 in der Akademie Paris. Dirichlets Beweis war zunächst unvollständig; nach Kritik durch Legendre gab er einen Ansatz zur Vervollständigung; dieser wurde 1828 in Crelles Journal ausführlich publiziert

Dirichlet $n=14$: 1832 in Crelles Journal

Lamé (1795-1870) $n=7$: 1839 in Liouvilles Journal

Lamé n beliebig: 1841 in Liouvilles Journal (Beweis erschien unvollständig, Kritik durch Liouville)

Kummer (1810-1893) 1844 in der Festschrift für das Königsberger Universitätsjubiläum: Die Lücke im Beweis bei Lamé kann nicht geschlossen werden! Der Beweisversuch von Lamé ist also endgültig als falsch zu bewerten.

Kummers monumentales Theorem: 1850 in Crelles Journal: Beweis für alle Primzahlexponenten $n=p$, bei denen p eine sogenannte „reguläre“ Primzahl ist.“
(Roquette, 1998, S. 6)

Nachdem Kummer den Großen fermatschen Satz für alle regulären Primzahlen bewiesen hatte, waren schon viele Exponenten erledigt, bis 100 waren zum Beispiel nur mehr $n=37$, 59 und 67 unbewiesen. Außerdem zeigte Kummer noch, dass alle Fälle, bei denen der Exponent eine irreguläre Primzahl ist, einer nach dem anderen mit großem Rechenaufwand bewiesen werden können. Hier kamen die im 20. Jahrhundert von Alan Turing entwickelten Computer ins Spiel. Sie konnten die benötigten Rechnungen in hinreichend kurzer Zeit durchführen und halfen somit, weitere Fälle zu beweisen.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 191)

Doch nie, auch nicht in Milliarden von Jahren, könnten Computer den Großen fermatschen Satz in seiner ganzen Tragweite beweisen, denn, und das ist auch die Schwierigkeit beim Finden des Beweises für Fermats letzten Satz, es gibt unendlich viele Werte für a , b und c .

Zusätzlich gibt es dann noch unendlich viele Werte für den Exponenten n , für den es den Beweis zu führen gilt, da es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt. Auch, wenn gegen Ende des 20. Jahrhunderts bereits bewiesen war, dass der Große fermatsche Satz für alle Werte $\leq 4\,000\,000$ zutrif, könnte ein Computer beliebig lange rechnen und hätte trotzdem den Großen fermatschen Satz noch immer nicht für alle Zahlen bewiesen. Mit reiner Rechenleistung konnte das Problem des Großen fermatschen Satzes nicht gelöst werden. (vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 191f)

4.4 Der Große fermatsche Satz in Verbindung mit der Taniyama-Shimura Vermutung

1984, auf einem Symposium in Deutschland, stellte Gerhard Frey eine interessante Entdeckung vor, die er in Verbindung mit dem Großen fermatschen Satz gemacht hatte. Wenn dieser falsch wäre, es also doch eine Lösung für die Gleichung $X^n + Y^n = Z^n$ ($X, Y, Z, n \in \mathbb{N}; n > 2; x, y, z \neq 0$) gäbe, wäre die sogenannte Taniyama-Shimura-Vermutung, eine unbewiesene Vermutung, auf die zwei japanische Mathematiker in den 60er Jahren kamen, ebenfalls falsch. Sollte allerdings die Taniyama-Shimura-Vermutung richtig sein, wäre automatisch auch Fermats letzter Satz richtig. Diese Tatsache konnte Gerhard Frey allerdings nicht selbst beweisen, sondern der amerikanische Mathematiker Ken Ribet erbrachte diesen Beweis zwei Jahre später. Von diesem Zeitpunkt an waren die Taniyama-Shimura-Vermutung und der Große fermatsche Satz untrennbar miteinander verbunden.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 228ff)

4.5 Die Lösung durch Andrew Wiles

Andrew Wiles war in den 1980 und 90er Jahren Mathematikstudent beziehungsweise Mathematikprofessor an den Universitäten von Cambridge und Princeton. Während er bei einem Freund zu Besuch war, hörte er von Ken Ribets Beweis. Von diesem Moment



Abbildung 17: Andrew Wiles

an wusste er, dass er die Taniyama-Shimura-Vermutung beweisen musste, denn er hatte schon von Kindheitstagen an davon geträumt, Fermats letzten Satz beweisen zu können. Wiles vernachlässigte alle Forschungen, an denen er gerade arbeitete und konzentrierte sich nur mehr auf diesen einen Beweis. Damit dies nicht allzu sehr auffiel, hielt er noch eine Minimalanzahl von Vorlesungen an der Universität ab und publizierte hie und da einmal Werke, die er zuvor als nicht veröffentlichungswürdig gehalten hatte. Ansonsten aber zog er sich ganz und gar in sein Haus zurück und arbeitete in seiner Dachkammer an dem Beweis. (vgl. Singh, Fermat's last Theorem, 1996, S. 7f (Transkript))

Zuerst las sich Wiles in alle mathematischen Arbeiten ein, die sich rund um das Thema der Taniyama-Shimura-Vermutung drehten. Danach begann er mit seinem mathematischen Schaffensprozess, bei dem er an manchen Tagen mehr, an anderen weniger erfolgreich war. (vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 239f)

Manchmal jedoch steckte er bei seinem Argumentationsgang in einer Sackgasse und kam einfach nicht weiter. Wiles selbst beschreibt seine Erfahrungen, Mathematik zu betreiben wäre so, als würde man ein komplett dunkles Zimmer betreten. Nach einiger Zeit wüsste man ungefähr, wo die Möbel stünden und dann, wenn man den Lichtschalter finden würde, wäre plötzlich alles hell und man würde sehen, womit man sich in der letzten Zeit herumgeschlagen hatte. Die Zeit, bis zu der er diesen methaphorischen Lichtschalter gefunden hatte, variierte von einigen Tagen bis zu einem halben Jahr oder mehr. (vgl. Singh, Fermat's last Theorem, 1996, S. 1 (Transkript))

So arbeitete Wiles ununterbrochen, bis er im Mai 1993 einen unglaublich langen, aber fertigen Beweis vor sich liegen hatte. Einmal während seines mathematischen Schaffensprozesses hielt er sogar eine Vorlesungsreihe über einen Teil seines Beweises, da er ihn mit seinem Kollegen Nick Katz, der Spezialist auf diesem Teilgebiet war, durchgehen wollte. Trotzdem kamen seine anderen Kollegen nie dahinter, welch großartigem Beweis er sich widmete. Weil im Juni 1993 in seiner Heimatuniversität Cambridge eine Konferenz über Zahlentheorie stattfand, wollte Wiles seinen Beweis dort präsentieren. Unter dem Beisein einiger Fachmänner auf den diversen Gebieten der Zahlentheorie stellte Andrew Wiles seinen Beweis vor und war auf einen Schlag einer der größten Mathematiker seiner Zeit. (vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 273ff)

Nun ging es daran, den 200 Seiten langen Beweis genauestens zu überprüfen und dazu wurden 6 Gutachter beauftragt, jeweils einen Teil davon zu übernehmen. Einer davon war Nick Katz und er war es auch, der am Ende des Sommers 1993 einen fundamentalen Fehler im Beweis fand, den er und Wiles in ihrer Vorlesungsreihe komplett übersehen hatten. Weil Andrew Wiles selbst nach Monaten der Korrekturversuche nicht weiter wusste, zog er einen seiner früheren Studenten, Richard Taylor, zu Rate. Im September 1994, sie hatten schon fast aufgegeben, gelang Wiles dann doch noch der Durchbruch. Er konnte seinen Beweis vervollständigen und dieser neue Beweis war letztendlich hieb- und stichfest. (vgl. Singh, Fermat's last Theorem, 1996, S. 11ff (Transkript))

Aufgrund seines Beweises erhielt Andrew Wiles 1997 den Wolfskehl Preis. Paul Wolfskehl war ein deutscher Industriller, der sich für den Großen Satz von Fermat interessierte. Deshalb hatte er auf dessen Lösung einen Preis in der Höhe von damals 100 000 Goldmark ausgesetzt, was heute ungefähr 1,5 Millionen Euro entsprechen würde. Aufgrund der Inflation war der Wolfskehl Preis, als ihn Andrew Wiles 1997 erhielt, jedoch nur mehr 40 000 Deutsche Mark wert. (Roquette, 1998, S. 11,16)

5 Fazit

Zusammenfassend ist zu sagen, dass Pierre de Fermat seine berühmte Vermutung um das Jahr 1637 - ganz genau ist es nicht bekannt - formulierte und diese dann nach seinem Tod mit einer Vielzahl anderer Postulate von seinem Sohn in einer neuen Ausgabe der Arithmetica veröffentlicht wurde. Wichtig ist zu wissen, dass Fermats Vermutung einfach eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras für höhere Exponenten ist.

Beim Satz des Pythagoras ist die Tatsache, dass das pythagoreische Tripel (3,4,5) ein rechtwinkeliges Dreieck bildet, was wohl schon recht früh in der Geschichte der Menschheit bekannt war, sehr interessant. Viele antike Kulturen verwendeten den Satz des Pythagoras für diverse Arten von Rechenbeispielen, und einige konnten ihn sogar beweisen. Dies waren jedoch erst Kulturen in der Spätantike, die die Idee des mathematischen Beweises von Pythagoras übernommen hatten. Pythagoras selbst war vermutlich der erste, der den nach ihm benannten Satz für allgemeine rechtwinkelige Dreiecke bewies und ist somit durchaus zu Recht der Namensgeber des Satzes.

Es gibt eine unendliche Anzahl von pythagoreischen Tripeln, ganzzahlige Lösungen für den Satz des Pythagoras, wohingegen es kein einziges Fermat Tripel, das heißt Lösungen für den Großen fermatschen Satz, gibt. Dies konnte allerdings erst 1994, über 350 Jahre, nachdem Fermat seine Vermutung äußerte, durch Andrew Wiles bewiesen werden. Bis dorthin war es allerdings ein langer Weg, der mit dem (quasi) Beweis von Leonhard Euler für den Fall $n=3$ und dem Beweis für $n=4$ von Fermat selbst begann. Was folgte, waren Jahrhunderte lang einzelne Beweisversuche, bis Ernst Kummer, ein deutscher Mathematiker, erstmals einen allgemeineren Beweis formulieren konnte, der eine Vielzahl von Zahlen ausschloss. Ende des 20. Jahrhunderts wurde dann der Große fermatsche Satz mit der Taniyama-Shimura-Vermutung verknüpft. Dadurch, dass Andrew Wiles diese beweisen konnte, bewies er auch den Großen fermatschen Satz.

Im Laufe meiner Recherchen bin ich auf die Vielseitigkeit des Satzes von Fermat und seiner Entstehungsgeschichte gestoßen. Selbst mir, bin ich doch ein Anfänger in zahlentheoretischen Untersuchungen, wäre es ein Leichtes gewesen, eine Arbeit in

vielfacher Länge von dieser hier zu schreiben, da es sehr, sehr viel Literatur zu diesem Thema gibt und noch einige weitere Aspekte erwähnenswert wären.

Wer noch mehr über den Großen fermatschen Satz oder den Satz des Pythagoras erfahren möchte, dem lege ich das Buch „Fermats letzter Satz“ von Simon Singh, den Film „Fermat’s last Theorem“ oder den Vortrag „Die Formel des Pythagoras“ von Rudolf Taschner ans Herzen, da diese die Geschichte des letzten Satzes von Fermat in einer einmaligen Art und Weise wiedergeben.

Literaturverzeichnis

- Bauer, T. (29. Mai 2009). Hinweise zum Abfassen von Abschlussarbeiten. Marburg, Deutschland.
- Beidas, E., Ritter, F., Plowman, F., & Gaudet, J. (Hrsg.). (2013). *1001 Ideen die unser Denken beeinflussen*. (H. Schrader, J. Voigt, C. Thomas, A. Jacobitz, & M. Schrader, Übers.) Zürich, Schweiz: Edition Olms AG.
- Boston, N. (2003). The proof of Fermat's last Theorem. University of Wisconsin-Madison, Wisconsin, USA.
- Edwards, H. (1977). *Fermats last Theorem*. New York: Springer-Verlag.
- Gauss, C. F. (1889). *Untersuchungen über höhere Arithmetik (Disquisitiones Arithmeticae)*. Remagen: Verlag Kessel.
- Gericke, H. (1984). *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*. Wiesbaden: Forier Verlag.
- Gronau, D. (2009). Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik. Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz, Steiermark, Österreich.
- Gronau, D. (2009). Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik. Franzens-Universität Graz, Steiermark, Österreich.
- Hartnick, T. (2002/2003). Der große Satz von Fermat und der Ring $\mathbb{Z}(p)$. *Vortrag im Rahmen der Vorlesung "Algebra 1" im Wintersemester 2002/2003*. Graz, Steiermark, Österreich.
- Hawking, S. (2007). *God created the Integers*. Pennsylvania: Running Press Book Publishers.
- Hoehn, A., & Huber, M. (2005). *Pythagoras*. Zürich: Orell Füssli Verlag.
- Kramer, J. (1995). Über die Fermat-Vermutung. Basel, Basel-Stadt, Schweiz.
- Möller, H. (2008). *Elementare Zahlentheorie und Problemlösen*. Abgerufen am 11. April 2015 von Mathekompass: <http://www.math.uni-muenster.de/u/mollerh/pages/numbertheory.html>

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (Dezember 1996). *MacTutor History of Mathematics archive*. Abgerufen am 3. Mai 2015 von Pierre de Fermat: <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Fermat.html>

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (Januar 1999). *MacTutor History of Mathematics archive*. Abgerufen am 3. Mai 2015 von Pythagoras of Samos: <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Pythagoras.html>

Penrose, R. (2004). *The road to reality: a complete guide to the laws of nature*. London: Jonathan Cape, Random House Group Ltd.

Ramsauer, N. (16. Dezember 2004). Fermats letzter Satz. *Schriftliche Hausarbeit zur Zulassung zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Realschulen nach LPO 1*. Regensburg, Bayern, Deutschland.

Ribenboim, P. (1979). *13 Lectures on Fermat's last Theorem*. New York: Springer-Verlag.

Roquette, P. (24. Januar 1998). Zum Fermat Problem. *Vortrag im Mathematischen Institut der Universität Heidelberg*. Heidelberg, Baden-Württemberg, Deutschland.

Rupp, K., & Letscher, B. (29. Januar 2008). Spezialfälle des Satzes von Fermat. Paderborn, Nordrhein-Westfalen, Deutschland.

Russell, B. (1919). *Einführung in die mathematische Philosophie*. Wiesbaden: Emil Vollmer Verlag.

Sas, G. (2008). Primzahltests. Wien, Wien, Österreich.

Singh, S. (Regisseur). (1996). *Fermat's last Theorem* [Kinofilm].
Transkript von der Webseite Nova; URL:
<http://www.pbs.org/wgbh/nova/transcripts/2414proof.html>

Singh, S. (2000). *Fermats letzter Satz*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Taschner, R. (2009). *Der Zahlen gigantischer Schatten*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Pierre de Fermat

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_de_Fermat.png 9

Abbildung 2: Ein Exemplar der Arithmetica, wie auch Fermat eines hatte

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover_2.jpg.. 10

Abbildung 3: Die berühmte Anmerkung von Pierre de Fermat

Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg?uselang=de> 13

Abbildung 4: Ausgabe der Arithmetica mit Anmerkungen von Fermat

Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-cover-Fermat.jpg?uselang=de> 14

Abbildung 5: rechtwinkeliges Dreieck 16

Abbildung 6: allgemeines rechtwinkeliges Dreieck für den ersten Beweis 18

Abbildung 7 : Skizze für den zweiten Beweis des Satzes des Pythagoras 19

Abbildung 8: Babylonischer Text Plimpton

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plimpton_322.jpg 19

Abbildung 9: Skizze zum Beispiel aus dem babylonischen Rechenbuch 20

Abbildung 10: 12 Knoten so angeordnet ergeben ein rechtwinkeliges Dreieck 21

Abbildung 11: Büste des Pythagoras

Quelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagoras_Bust_Vatican_Museum_\(cropped\).jpg?uselang=de](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pythagoras_Bust_Vatican_Museum_(cropped).jpg?uselang=de) 21

Abbildung 12: Figur für einen weiteren Beweis 23

Abbildung 13: Ausgangsposition für den Beweis 24

Abbildung 14: Endposition des Beweises 24

Abbildung 15: Quadrat mit Seitenlänge 1 27

Abbildung 16: Portrait von Leonhard Euler

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg 28

Abbildung 17: Andrew Wiles; copyright C. J. Mozzochi, Princeton N.J

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andrew_wiles1-3.jpg 47

Glossar

Satz: Ein mathematischer Satz ist eine bewiesene mathematische Aussage, die immer und überall gültig ist.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 44ff)

Beweis: Beim mathematischen Beweis wird mithilfe von logischen Schlussfolgerungen aus bereits bewiesenen Sätzen oder den Axiomen der Mathematik selbst eine Aussage bestätigt, die, wenn sie einmal bewiesen wurde, uneingeschränkte Gültigkeit hat.

(vgl. Singh, Fermats letzter Satz, 2000, S. 44ff)

Lemma: Ein Lemma ist „ein Ergebnis, das als Hilfsmittel für einen Satz (...) benötigt wird, jedoch weniger von eigenständigem Interesse ist. Oft ist die Aussage eines Lemmas recht technischer Natur.“

(Bauer, 2009, S. 7)

Parität: „Zwei ganze Zahlen haben die gleiche Parität, wenn entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihre Differenz durch 2 teilbar ist.“

(Hoehn & Huber, 2005, S. 165)

Teilerfremdheit: Sind 2 Zahlen a und b teilerfremd, so gilt $\text{ggT}(a, b) = 1$

Verschiedenheit: Sind 2 Zahlen a und b verschieden, so gilt $a \neq b$

Teiler: Die Zahl $t \in \mathbb{Z}$ ist Teiler einer Zahl $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \quad nt = z$

⚡ ... Es ist ein Widerspruch in der Argumentation aufgetreten.

paarweise Teilerfremdheit: Wenn mehrere Zahlen paarweise teilerfremd sind, so ist der größte gemeinsame Teiler aller Paare, die man aus ihnen bilden kann gleich 1.

q.e.d.: quod erat demonstrandum, übersetzt: „Was zu zeigen war“, wird in der Mathematik verwendet, um einen Beweis zu beschließen und anzudeuten, dass eine korrekte mathematische Aussage vorliegt.

Selbstständigkeitserklärung VwA

Name: Simon Hackl

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Freistadt, am 12.02.2016

Ort, Datum

Simon Hackl

Unterschrift

Zustimmung zur Aufstellung in der Schulbibliothek

Ich gebe mein Einverständnis, dass ein Exemplar meiner vorwissenschaftlichen Arbeit in der Schulbibliothek meiner Schule aufgestellt wird.

Freistadt, am 12.02.2016

Ort, Datum

Simon Hackl

Unterschrift