Beethoven-Gymnasium der Stadt Bonn
Adenauerallee 51-53
53113 Bonn

Die Mathematik hinter GPS

Facharbeit
im Leistungskurs Mathematik
Jahrgangsstufe 11
Schuljahr 2013/2014

Stefan Koch

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Seit dem Altertum wird räumliche Ortung und die dadurch ermöglichte Navigation in der Seefahrt praktiziert. Damals stützte sich die Ortung auf Sternenkonstellationen. Später kamen nichtoptische Methoden auf. Die Schiffe wurden mithilfe von fest installierten Sendern gelotst, die sich an der Küste befanden und im elektromagnetischen Bereich sendeten. Heute ist die satellitengestützte Navigation und Ortung verbreitet, welche von der regionalen Infrastruktur unabhängig ist. Auch der Anwendungsbereich hat sich drastisch vergrößert. Die satellitengestützte Ortung findet nicht mehr nur nautische Anwendung, sondern auch in der Luftfahrt, bei Navigationssystemen in Autos, im Vermessungswesen und im Outdoorbereich[3]. In der Smartphone-Ära kann jeder seine Position ohne großen persönlichen Aufwand bestimmen.

Möglich wird dies, abgesehen von den Entwicklungen bei den Empfängern, vor allem durch das amerikanische Satellitensystem GPS und das sowjetische GLONASS. Obwohl beide etwa zeitgleich seit den 1970er Jahren entwickelt wurden, hat sich das GPS, offiziell NAVSTAR-GPS (Navigation Satellite Timing and Ranging-Global Positioning System) global und vor allem für zivile Zwecke durchgesetzt. Als eigenständiges und ergänzendes System wird voraussichtlich Ende 2014 das europäische System GALILEO die Positionsgenauigkeit entscheidend verbessern, was wiederum den Anwendungsbereich vergrößern wird[5].

Das Grundprinzip ist bei allen räumlichen Ortungssystemen gleich. Es gibt jeweils das Raum-, Boden-, und Nutzersegment. Das Bodensegment sorgt dafür, dass die Satelliten die richtigen Informationen senden. Das Bodensegment oder auch Kontrollsegment besteht aus einer Hauptkontrollstation, drei Monitorstationen, die die Satellitenbahnen überprüfen, und drei Bodensendestationen, die den Satelliten die entsprechenden Informationen übermitteln. Das Raumsegment beim GPS besteht aus derzeit 31 Satelliten, die die Sichtbarkeit von mindestens vier Satelliten global zu einer hohen Wahrscheinlichkeit gewährleisten. Die Satelliten senden sich außerdem gegenseitig ihre Bahndaten, um ihre Position zu bestimmen.

Der Unterschied beim Nutzersegment ist, dass es lediglich empfängt. Im Folgenden werden wir vor allem das Nutzersegment mathematisch näher beleuchten. Außerdem werden wir etwas über die Bezugssysteme zu Raum- und Zeit erfahren und schließlich eine exemplarische Rechnung durchführen.

Die Arbeit basiert vorwiegend auf den Büchern von Mansfeld[5] und Kaplan[4], sowie dem Artikel von Bancroft[1]. Die Matrizen- und Vektorenrechnung orientiert sich am Schulbuche Mathematik ([2]Kapitel 8 und 9). Für die Rechnung ist das Programm octave relevant. Die Graphiken sind mithilfe von GEOGEBRA und tikz entstanden.

2 Positionsbestimmung anhand von Entfernungen

Eine Entfernungsbestimmung hat jeder schon einmal durchgeführt. Bei einem Gewitter messen wir die Zeit zwischen Blitz und Donner, wobei 3 Sekunden für je einen Kilometer stehen. Wir multiplizieren die Laufzeit des Signals mit der Laufgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit=ca. $\frac{1}{3}$ Kilometer pro s) und erhalten so die Entfernung. Entsprechend könnte beim GPS im einfachsten Fall der Zeitunterschied $(t_1 - t_2)$ zwischen Empfänger- und Senderuhr gemessen und mit der

Lichtgeschwindigkeit v multipliziert werden.

$$(t_1 - t_2) * v = r; r = \text{ Entfernung}$$

Außerdem sendet der Satellit seine eigene Position. In der Ebene betrachtet erhält man also folgendes Bild:

Nach dem Satz des Pythagoras ist die Entfernung zweier Punkte zum Quadrat ($A = (x_1, y_1)$; $B = (x_2, y_2)$) die Addition der Differenzen der einzelnen Koordinaten zum Quadrat, also

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = v^2(t_1 - t_2)^2$$

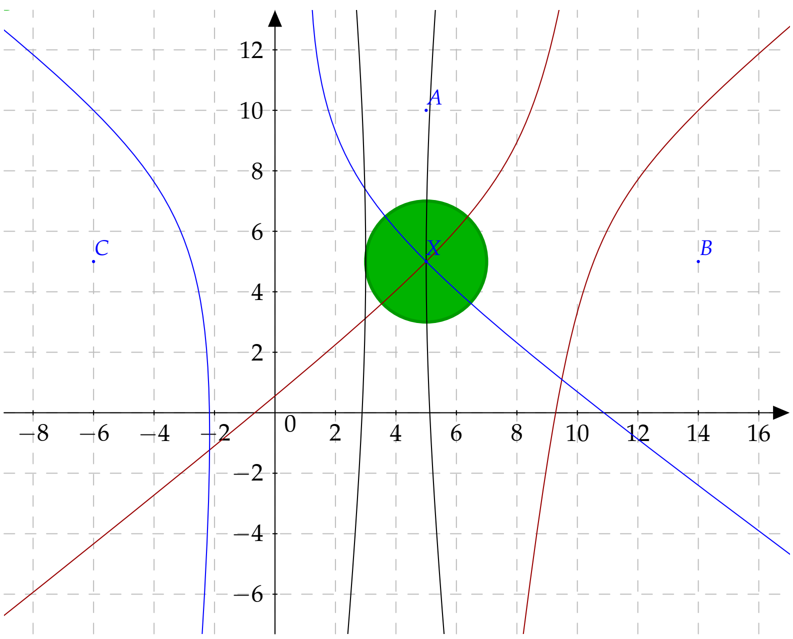
Mit einem weiteren Punkt erhalten wir ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (x_1 und y_1), sodass wir null bis zwei Lösungen in Form von Schnittpunkten zweier Kreise bekommen.

3 Positionsbestimmung anhand von Entfernungsdifferenzen

3.1 Verfahren in der Ebene

Die GPS-Satelliten haben eine mittlere Bahnhöhe von ca. 26600 km über dem Erdmittelpunkt bzw. ca. 20200 km über der Erdoberfläche[4]. Bei einem Satelliten, der sich direkt über uns befände, betrüge der Zeitunterschied also $\frac{20.200km}{300.000km/s} \approx 0,067s$. Da die Empfängeruhr normalerweise bei weitem nicht genau genug ist, handelt es sich tatsächlich um eine Positionsbestimmung anhand von Entfernungsdifferenzen. Dafür ist eine weitere Information nötig, da wir t wie eine weitere Unbekannte behandeln.

Wir erhalten also drei Hyperbeln mit keinem, einem oder zwei Schnittpunkten. Aufgrund der besonderen Geometrie (die Satelliten sind mehr oder weniger kreisförmig auf demselben Radius um die Erde, die hier als Kreisfläche dargestellt ist, angeordnet) ergibt sich immer der dritte Fall, wobei ein Schnittpunkt von vornherein ausgeschlossen werden kann.



In anderen Worten haben wir ein Gleichungssystem wie oben, nur mit einer weiteren Unbekannten t und einem weiteren Punkt.

$$\begin{aligned}
(x-a_1)^2+(y-a_2)^2 &= c^2(t-a_3)^2 \\
(x-b_1)^2+(y-b_2)^2 &= c^2(t-b_3)^2 \\
(x-c_1)^2+(y-c_2)^2 &= c^2(t-c_3)^2.
\end{aligned}$$

Wir schreiben $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\t\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und genauso für $\vec{b}$ und $\vec{c}$. $\vec{x}$ sind die gesuchten Positionswerte, während $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die empfangenen Werte der Satelliten sind. Wir setzen

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-c^2\end{pmatrix},$$

$$(\vec{x}-\vec{a})^TG(\vec{x}-\vec{a})=0, \qquad (\vec{x}-\vec{b})^TG(\vec{x}-\vec{b})=0, \qquad (\vec{x}-\vec{c})^TG(\vec{x}-\vec{c})=0.$$

Da G eine Diagonalmatrix ist, ergibt sich nach Ausmultiplizieren nach den binomischen Formeln

$$\begin{aligned}
\vec{x}^TG\vec{x}-2\vec{a}^TG\vec{x}+\vec{a}^TG\vec{a} &= 0 \\
\vec{x}^TG\vec{x}-2\vec{b}^TG\vec{x}+\vec{b}^TG\vec{b} &= 0 \\
\vec{x}^TG\vec{x}-2\vec{c}^TG\vec{x}+\vec{c}^TG\vec{c} &= 0
\end{aligned}$$

Man kann sich zunutze machen, dass der quadratische Teil $\vec{x}^TG\vec{x}$ bei jeder Gleichung gleich ist. Wir substituieren $\rho=\vec{x}^TG\vec{x}$.

Wir subtrahieren je zwei Gleichungen, "opfern" also eine Gleichung, erhalten dafür aber ein lineares Gleichungssystem, mit dem wir umgehen können,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\vec{a}^TG\vec{a}-\vec{b}^TG\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})^TG\vec{x} &= 0 \\
\frac{1}{2}(\vec{a}^TG\vec{a}-\vec{c}^TG\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})^TG\vec{x} &= 0
\end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{2}(\vec{a}^TG\vec{a}-\vec{b}^TG\vec{b})$ unabhängig von $\vec{x}$ ist. Zur Veranschaulichung werden wir dieses Gleichungssystem mit einfachen Werten per Hand lösen. Dazu lösen wir zunächst nach x und y in Abhängigkeit von t auf und setzen dann in die Ausgangsgleichung ein. Wir definieren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\10\\-3\end{pmatrix}, \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}14\\5\\-7\end{pmatrix} \text{ und } \qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}-6\\5\\-9\end{pmatrix}.$$

Wir nehmen als Geschwindigkeitseinheit $300000 km/s$ und messen die Zeit als Vielfaches von $t = 300.000^{-1}$Sekunden. Dann gilt

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(5^2+10^2-3^2-(14^2+5^2-7^2))+(14-5)x+(5-10)y-(-7-(-3))t &= 0 \\ \frac{1}{2}(5^2+10^2-3^2-(6^2+5^2-9^2))+(-6-5)x+(5-10)y-(-9-(-3))t &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x-5y+4t-28 &= 0 \\ -11x-5y+6t+68 &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x-5y &= -4t+28 \\ -11x-5y &= -6t-68 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 28 \\ -68 \end{pmatrix}$$

Bei zwei Gleichungen und drei Unbekannten können wir zunächst nur nach x und y in Abhängigkeit von t auflösen. Der Ansatz führt über

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} e_1 t + f_1 \\ e_2 t + f_2 \\ t \end{pmatrix}$$

und

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 9 & -5 & -4 & 28 \\ -11 & -5 & -6 & -68 \end{array}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{24}{5} \\ 0 & 1 & \frac{49}{50} & \frac{76}{25} \end{array}\right)$$

zu

$$x = \frac{1}{10}t + \frac{24}{5} \qquad y = \frac{49}{50}t + \frac{76}{25}.$$

Nach Einsetzen in die erste Ausgangsgleichung

$$\vec{x}^T G \vec{x} - 2\vec{a} G \vec{x} + \vec{a}^T G \vec{a} = 0$$

erhalten wir eine quadratische Gleichung, die wir mit der pq-Formel lösen können:

$$\begin{aligned} 0 &= (e_1 t + f_1)^2 + (e_2 t + f_2)^2 - t^2 - 2a_1(e_1 t + f_1) - 2a_2(e_2 t + f_2) + 2a_3 t + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \\ &= (e_1^2 + e_2^2 - 1)t^2 + 2(e_1 f_1 + e_2 f_2 - a_1 e_1 - a_2 e_2 + a_3)t \\ &\quad +(-2a_1 f_1 - 2a_2 f_2 + f_1^2 + f_2^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die quadratische Gleichung

$$-\frac{37}{1250}t^2 - \frac{12301}{625}t + \frac{24676}{625} = 0$$

mit den Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = -\frac{24676}{37} \approx -666.9$.

Wie gesagt bräuchte man eigentlich eine weitere Information; da der zweite Punkt jedoch viel zu weit (ca. 200 Mio. Kilometer) entfernt liegt, erübrigt sich das. Nach Einsetzen erhalten wir für $\vec{x}$ $x = 5$ und $y = 5$.

3.2 Verfahren im Raum

Bei der Lösung der GPS-Gleichungen, mit der wir uns bisher befasst haben und die wir uns im Folgenden im Raum anschauen werden, handelt es sich um eine sogenannte geschlossene Lösungsform, bei der also algebraisch die Positionswerte bestimmt werden. In der Praxis wird sie jedoch kaum noch verwendet, da man in dem Fall, dass man die Signale von mehr als vier Satelliten empfängt, diese Zusatzinformationen nicht verarbeiten kann. Stattdessen gibt es verschiedene Näherungsverfahren. Erwähnenswert sind die iterativen Verfahren, die auf Linearisierung beruhen, die man anfangs verwendete. Hierbei kann z.B. mehrkanalig gearbeitet werden, wenn die Satelliten auf verschiedenen Frequenzen senden, die in der Atmosphäre unterschiedlich stark wechselwirken ([4]Kapitel 2.4.2). Aktuell wird vor allem die sogenannte Kalman-Filterung verwendet, da sie z.B. die Bewegungssensoren von Handys und andere zusätzliche Informationen in die Rechnung integrieren kann. Das ist vor allem bei der Navigationsfunktion in Städten relevant, da hier die Gebäude die Signale der GPS-Satelliten reflektieren und größere Ungenauigkeiten verursachen([5]Kapitel 3.5.2). Zum mathematischen Verständnis der Funktionsweise von GPS ist jedoch die geschlossene Lösungsform sehr geeignet.

Im Raum funktioniert die Rechnung weitgehend analog zur Ebene. Wir brauchen also nun vier statt drei Informationspaare aus je Position und Zeit. Da wir wissen, dass wir uns auf einer bestimmten Fläche befinden (die Erde), würden auch drei schon reichen, sofern wir unsere Höhe über dem Meeresspiegel kennen. Konkret wäre das z.B. eine in unserem Empfänger gespeicherte topographische Karte.

Ich werde außerdem anhand der folgenden Überlegungen mein Programm erläutern, welches in der Programmiersprache octave geschrieben ist. Dieses schreibe ich linksbündig und in anderer Schrift. Ein "%"bedeutet, dass die Zeile eine Anmerkung ist und vom Programm nicht gelesen wird. ”a’*b” bedeutet ”a transponiert mal b”.

Wir schreiben

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}.$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

Für octave entspricht das

```
a=[a_1; a_2; a_3; a_4];
b=[b_1; b_2; b_3; b_4];
```

```
c=[c_1; c_2; c_3; c_4];
d=[d_1; d_2; d_3; d_4];
v=300000;
G=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0; 0 0 0 -v^2];
```

Wie in der Ebene erhalten wir zunächst die Gleichung $(\vec{a}-\vec{x})^T G(\vec{a}-\vec{x}) = 0$, klammern aus $\vec{a}^T G\vec{a} - 2\vec{a}^T G\vec{x} + \vec{x}^T G\vec{x} = 0$ und substituieren den quadratischen Term $\vec{x}^T G\vec{x}$ durch ρ. Entsprechend verfahren wir mit den anderen Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$. Wir subtrahieren je zwei Gleichungen, um den quadratischen Term zu entfernen.

$$
\begin{aligned}
\vec{a}^T G\vec{a} - \vec{b}^T G\vec{b} - 2(\vec{a}-\vec{b})^T G\vec{x} &= 0 \\
\vec{a}^T G\vec{a} - \vec{c}^T G\vec{c} - 2(\vec{a}-\vec{c})^T G\vec{x} &= 0 \\
\vec{a}^T G\vec{a} - \vec{d}^T G\vec{c} - 2(\vec{a}-\vec{d})^T G\vec{x} &= 0.
\end{aligned}
$$

Um nach x, y, z in Abhängigkeit von t aufzulösen, definieren wir $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und entsprechend auch für $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$, wobei $\vec{x}$ wieder die gesuchten Positionswerte sind bzw.

```
a1=a(1:3);
b1=b(1:3);
c1=c(1:3);
d1=d(1:3);.
```

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
-2(\vec{a}' - \vec{b}')\vec{x}' &= 2c^2(a_4 - b_4)t - c^2(a_4^2 - b_4^2) - \vec{a}'^T\vec{a}' + \vec{b}'^T\vec{b}' \\
-2(\vec{a}' - \vec{c}')\vec{x}' &= 2c^2(a_4 - c_4)t - c^2(a_4^2 - c_4^2) - \vec{a}'^T\vec{a}' + \vec{c}'^T\vec{c}' \\
-2(\vec{a}' - \vec{d}')\vec{x}' &= 2c^2(a_4 - d_4)t - c^2(a_4^2 - d_4^2) - \vec{a}'^T\vec{a}' + \vec{d}'^T\vec{d}'.
\end{aligned}
$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich wieder in Abhängigkeit von t auflösen. Dazu schreiben wir es als Matrixvektorgleichung: Mit $A = 2\left(\vec{a}' - \vec{b}', \vec{a}' - \vec{d}'\right)^T$

```
A=2*[(a1-b1)'; (a1-c1)'; (a1-d1)'];
```

erhält das Gleichungssystem die Form

$$
A\vec{x}' = 2c^2 t \begin{pmatrix} a_4 - b_4 \\ a_4 - c_4 \\ a_4 - d_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c^2(a_4^2 - b_4^2) + \vec{a}'^T\vec{a}' - \vec{b}'^T\vec{b}' \\ c^2(a_4^2 - c_4^2) + \vec{a}'^T\vec{a}' - \vec{c}'^T\vec{c}' \\ c^2(a_4^2 - d_4^2) + \vec{a}'^T\vec{a}' - \vec{d}'^T\vec{d}' \end{pmatrix}. \tag{1}
$$

Wir setzen $\vec{x}' = t\vec{e}' + \vec{f}'$ und formen nach $\vec{e}'$ und $\vec{f}'$ um.

```
e1=A\(2*v^2*[a(4)-b(4); a(4)-c(4); a(4)-d(4)]);
f1=A\(-v^2*[a(4)^2-b(4)^2; a(4)^2-c(4)^2; a(4)^2-d(4)^2]
   +[b1'*b1-a1'*a1; c1'*c1-a1'*a1; d1'*d1-a1'*a1]);
```

Dann ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} e_1 t + f_1 \\ e_2 t + f_2 \\ e_3 t + f_3 \\ t \end{pmatrix}$.

```
e=[e1; 1];
f=[f1; 0];
```

Das setzen wir wiederum in $\vec{a}^T G \vec{a} - 2\vec{a}^T G \vec{x} + \vec{x}^T G \vec{x} = 0$ ein.

```
% e'*G*e*t^2+2*(e'*G*f-a'*G*e)*t+(a'*G*a-2*a'*G*f+f'*G*f)=0
```

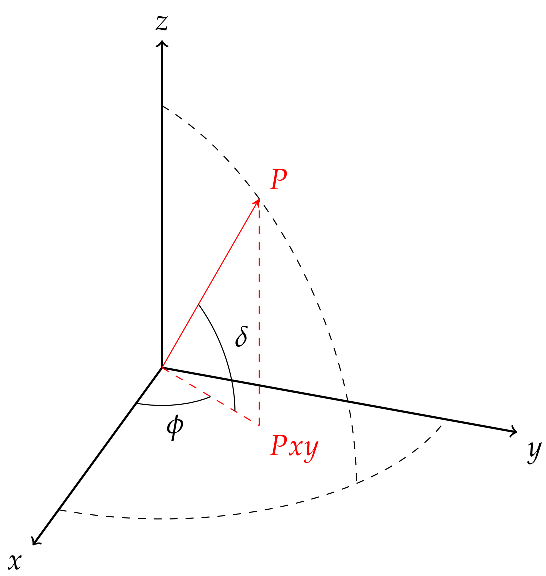
Diese quadratische Gleichung können wir lösen und erhalten die Werte des Vektors $\vec{x}$.

```
w=e'*G*e;
p=2*(e'*G*f-a'*G*e)/w;
q=(a'*G*a-2*a'*G*f+f'*G*f)/w;
% t^2+pt+q=0
t1=-p/2 + sqrt( p*p/4 - q);
t2=-p/2 - sqrt( p*p/4 - q);
x=(t1*e+f)*1000;
printf ("x=( %7.8f, %7.8f, %7.8f, %7.8f )\n",x(1:3), x(4)/1000);
```

Mit t2 erhält man einen Punkt, der außerhalb der Mondbahn liegt. Der letzte Befehl gibt an, wie man das Ergebnis dargestellt haben möchte.

4 Bezugssysteme

4.1 Koordinatensysteme



Bevor wir nun eine konkrete Rechnung durchführen, stellt sich die Frage, welches Koordinatensystem wir benutzen. Die Zielwerte wollen wir in Längen- und Breitengraden sowie Höhe angeben, also im Polarkoordinatensystem. Ein Punkt wird mit zwei Winkeln und seinem Abstand zum Ursprung angegeben. Das geographische Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Erdmittelpunkt und dreht sich mit der Erde, es handelt sich um ein sogenanntes erdfestes Bezugssystem oder auch Earth Centered Earth Fixed System (ECEF).

Die Rechnung gestaltet sich jedoch im kartesischen Koordinatensystem als bedeutend einfacher. Dieses hat drei Achsen, wobei der Koordinatenursprung durch den Mittelpunkt der Erde definiert ist.

Die Umrechnung zwischen kartesischen und polaren Koordinaten kann man sich relativ einfach anhand nebenstehender Grafik vor Augen führen. Die Satelliten senden ihre Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem, der Empfänger errechnet seine Position und soll sie anschließend in geographischen Koordinaten angeben.

Für die Umrechnung von den geographischen polaren in kartesische Koordinaten auf der Kugel gilt

$$x = r\cos\delta\cos\phi, \qquad y = r\cos\delta\sin\phi, \qquad z = r\sin\delta.$$

Für die Umrechnung von kartesischen in polare Koordinaten gilt

$$\phi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x \geq 0 \\ 180^\circ + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ -180^\circ + \arctan(\frac{y}{x}) & x < 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}, \qquad \delta = \arctan\left(\frac{z\sin\phi}{y}\right), \qquad r = \frac{\sin\delta}{z}.$$

4.2 Zeitsystem

Die GPS-Systemzeit entspricht nicht der Weltzeit UTC (Universal Time Coordinated). Es gibt zwei wesentliche Unterschiede: Die Weltzeit wird zwischen den verschiedenen Instituten, die mithilfe von Atomuhren Zeitmessungen durchführen, regelmäßig abgeglichen. Sie wird außerdem mit der astronomischen Zeit (Jahreszeiten) über Sprungsekunden synchronisiert. Die GPS-Systemzeit wird hingegen von den Atomuhren der Satelliten und der drei Bodenstationen bestimmt. Zweitens hat sie keine Schaltsekunden, weshalb sie gegenwärtig um etwa $30s$ von der Weltzeit abweicht. Am 5. Januar 1988 um 00.00 Uhr stimmten beide überein.

5 Genauigkeit

Unsere idealisierte Erde ist eine Kugel und hat einen Umfang von 40000 Kilometern. Um auf dem Äquator eine Genauigkeit der Breite wie Länge von einem Meter zu haben, brauchen wir also in der Gradangabe der Zielwerte eine Genauigkeit von $360^\circ/40.000.000 = 0,000.009^\circ$, das entspricht etwa $\frac{1}{40}$ Bogensekunde. Im kartesischen Koordinatensystem ist das ungefähr ein Meter.

In der Beispielrechnung geben wir die Positionsdaten in Kilometern und die Zeit in Sekunden an. Als Ausgangswerte setzen wir

```
a=[12836.31170; 10327.43219; 20881.25595; -.06904235217];
b=[24617.74388; 4492.354691; 9013.268925; -0.07130716681];
c=[16175.30156; -10394.17414; 18378.63889; -0.07052677265];
d=[7600.057414; -4983.187164; 24997.21138; -0.07036425856];
```

octave rechnet mit 16 Stellen. Man kann beobachten, dass das Ergebnis damit noch auf 6 Stellen genau ist, danach erhält man Rundungsfehler. Damit lässt sich unsere Vorgabe nicht erfüllen, es zeigt jedoch, wie genau ein GPS Empfänger rechnen muss. Wir erhalten als Position

```
x=( 4001.63791821, 499.030312171, 4932.35227013, 0.00000000 )
```

In geographischen Koordinaten sind das 7,108 ° westliche Länge und 50,730 ° nördlicher Breite, wenn wir nur von den 6 genauen Stellen ausgehen. Außerdem erhalten wir eine Höhe von ca. 134,5 Metern und die Zeit 0 Sekunden, also Mitternacht. Geben wir das bei google maps ein, landen wir bei Adenauerallee 18 in nächster Nähe des Beethovengymnasiums!

Nun können wir mit dem Programm numerisch verschiedene Fälle ausprobieren. Bei der Position der Satelliten können wir davon ausgehen, dass sie sehr genau sind, da die Satelliten untereinander und mit der Bodenstation ständig in Kontakt sind. Was kritischer ist, ist die gesendete Zeit. Diese breitet sich nämlich keineswegs mit Lichtgeschwindigkeit konstant aus, sondern je nach aktueller Beschaffenheit der Atmosphäre sehr unterschiedlich. In der Praxis sendet der Satellit daher zusätzliche Informationen über die Atmosphäre. Dennoch bleibt diese Information der kritische Punkt.

Verändern wir zum Beispiel die Zeit eines Satelliten um $\frac{1}{10.000}$ Sekunde, verschiebt sich die errechnete Position um bis zu 50 Kilometer auf der Erdoberfläche, bei einer $\frac{1}{100.000}$ Sekunde um ca. 1 Kilometer. Ist diese Ungenauigkeit bei zwei Signalen vorhanden, hebt sich der Fehler entweder auf oder verstärkt sich auf bis zu ca. 4 Kilometer.

Beim GPS beträgt der durchschnittliche Fehler für zivile Nutzer 10,3 Meter zu einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 %, d.h. der Fehler der Zeitmessung liegt in noch deutlich kleinerem Bereich[5].

6 Rück- und Ausblick

Wir haben die rein mathematische Funktionsweise von GPS kennengelernt und die für den Empfänger relevanten Rechenschritte verstanden, indem wir selbst eine Rechenmöglichkeit aufgestellt haben. Die Abschnitte zu Bezugssystemen für Raum und Zeit haben die Fragestellung konkret beleuchtet. Die Überlegungen zur Genauigkeit lassen die Komplexität des tatsächlichen Systems erkennen.

Dennoch wurde nur ein kleiner Teil, nämlich das Nutzersegment, behandelt und das Thema durch die mathematische Betrachtungsweise zum Teil sehr vereinfacht. Ein Beispiel: Nach der speziellen Relativitätstheorie von Einstein vergeht die Zeit an Orten höherer Schwerkraft langsamer als an Orten niedriger Schwerkraft. Für GPS bedeutet das, dass die Atomuhren der Satelliten langsamer gehen als die auf der Erdoberfläche. Dieser Effekt ist zwar minimal, wird jedoch in der Praxis berücksichtigt werden, damit der Satellit das richtige Signal sendet.

GPS und generell satellitengestützte Ortungssysteme sind zur Zeit hochaktuell, vor allem angesichts der anstehenden Inbetriebnahme des europäischen Systems GALILEO. Diese Entwicklungen sind sehr interessant, es lohnt sich also, sich noch weiter damit zu beschäftigen!

7 Literatur

[1] S. Bancroft. An algebraic solution of the GPS equation. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic systems*, Vol. AES-21, Nr.7, Seiten:56-59, 1985.

[2] Manfred Baum et al. *Mathematik Sekundarstufe I. Qualifikationsphase für den Leistungskurs Nordrhein-Westfalen. Schülerbuch mit CD-ROM*. Cornelsen Verlag GmbH, 2011.

[3] J. Gomoletz, J. Grehn, and J. Krause. *Metzler Physik*. Metzler Physik. Schroedel Verlag GmbH, 2007.

[4] E.D. Kaplan. *Understanding GPS [Global Positioning System]: Principles and Applications*. Mobile communications series. Artech House, Incorporated, 1996.

[5] W. Mansfeld. *Satellitenortung und Navigation: Grundlagen, Wirkungsweise und Anwendung globaler Satellitennavigationssysteme*. Vieweg+Teubner Verlag, 2009.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Zitate und Übernahmen sind im Text der Facharbeit kenntlich gemacht.