FACHARBEIT

Fachbereich Mathematik

Max-Planck-Gymnasium Gelsenkirchen

Leistungskurs Mathematik 2012/13

Funktionentheorie

Untersuchung komplexwertiger Funktionen auf komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie unter besonderer Betrachtung der komplexen Exponentialfunktion

Dennis Jaschek

Betreuer: Herr Hannes Stoppel

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Funktionentheorie stellt ein Teilgebiet der Mathematik dar, welches sich mit der Theorie differenzierbarer komplexwertiger Funktionen mit komplexen Variablen befasst. Sie wurde im 19. Jahrhundert von den Hauptbegründern Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Bernhard Riemann (1826–1866) und Karl Weierstraß (1815–1897) entwickelt. Jeder von ihnen hatte methodisch unterschiedliche aber äquivalente Zugänge zur Funktionentheorie.

Auf den ersten Blick unterscheidet sie sich kaum von der reellen Analysis. Begriffe wie Folgen, Konvergenz und Stetigkeit werden analog definiert und haben ähnliche Eigenschaften. Bei komplex differenzierbaren Funktionen hört die Gemeinsamkeit mit dem Reellen jedoch auf. Vor allem die Holomorphie, eine Eigenschaft bestimmter komplexwertiger Funktionen, welche eine Vielzahl von interessanten Phänomenen produziert, die in der reellen Analysis keine Analogie besitzen, hat mich zur Wahl dieser Thematik bewogen.

Im Rahmen dieser Arbeit lege ich die komplexe Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen, insbesondere unter Verwendung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, dar und untersuche infolgedessen die komplexe Exponentialfunktion auf ihre komplexe Differenzierbarkeit. Darauf aufbauend führe ich den Begriff der Holomorphie ein und zeige einige besondere Eigenschaften holomorpher Funktionen auf. Im Zentrum der Untersuchung steht die Fragestellung, ob es sich bei der komplexen Exponentialfunktion um eine holomorphe Funktion handelt.

Die Theorie der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die Kenntnis über den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen werden für diese Arbeit vorausgesetzt.

1 Komplexe Funktionen

Auf dem Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der komplexen Zahlen (vgl. [1], 27–29) lassen sich eine Vielzahl von Funktionen definieren. Identifiziert man $\mathbb{C}$ als Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ (vgl. [7], 26), indem $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ als Zeilenvektor (x, y) oder Spaltenvektor $\binom{x}{y}$ notiert wird, so haben komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Form

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Diese Funktionen f lassen sich in zwei reellwertige Funktionen u und v mit

$$u(x, y) := \mathrm{Re}(f(z)), \quad v(x, y) := \mathrm{Im}(f(z))$$

unterteilen (vgl. [2], 512).

1.1 $\mathbb{R}$-Linearität

Aufgrund der Tatsache, dass ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ auch als ein $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden kann, wird zwischen $\mathbb{R}$-linearen und $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen unterschieden. Jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist zwar $\mathbb{R}$-linear, die Umkehrung ist jedoch im Allgemeinen falsch (vgl. [3], 75–80; [6], 9). Für Abbildungen gilt:

Definition 1.1 Eine Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{R}$-linear, wenn

i) $L(z_1 + z_2) = L(z_1) + L(z_2)$

ii) $L(\lambda z) = \lambda L(z)$

für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten (vgl. [3], 109).

Nach den Sätzen der Linearen Algebra besitzt eine solche $\mathbb{R}$-lineare Abbildung eine Abbildungsmatrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, mit der sich die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$L(z) = A \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

darstellen lässt (vgl. [3], 288; [6], 9). Die durch A induzierte Abbildung erfüllt die Gleichungen i) und ii).

1.2 $\mathbb{C}$-Linearität

Eine Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$-linear, wenn sie $\mathbb{R}$-linear ist und die Gleichung ii) aus Abschnitt 1.1 sogar für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Für Letzteres reicht es nachzuweisen, dass $L(i) = iL(1)$ gilt (vgl. [6], 9). Unter Verwendung der Abbildungsmatrix A ergibt sich:

$$\begin{aligned} L(i) = iL(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \overset{!}{=} i \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn $c = -b$ und $d = a$ gilt. Damit ist L genau dann eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, wenn sie durch folgende Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann (vgl. [6], 9).

2 Stetigkeit

Die Stetigkeit einer komplexen Funktion ist ähnlich definiert wie die einer reellen Funktion.

Definition 2.1 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ ist an der Stelle $z_0 \in D$ genau dann stetig, wenn (vgl. [4], 62; [6], 27)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ für alle $z_0 \in D$ existiert, sodass gilt (vgl. [6], 27):

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Die Funktion f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist (vgl. [4], 62).

Satz 2.2 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ ist an der Stelle $z_0 \in D$ genau dann stetig, wenn die reellwertigen Funktionen $u := Re\ f$ und $v := Im\ f$ stetig in z_0 sind. Die Funktion f heißt stetig in D, falls u, v in jedem Punkt von D stetig sind (vgl. [6], 29).

3 Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit kann auch für Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert werden. Dies geschieht, aufgrund der Entsprechung der komplexen Ebene mit dem $\mathbb{R}^2$, mit einigen Einschränkungen fast analog zur reellen Differenzierbarkeit über einen Differenzenquotienten.

3.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 3.1 Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, mit $z_0 \in D$. Die Funktion f heißt komplex differenzierbar in z_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

in $\mathbb{C}$ existiert (vgl. [4], 99; [6], 38). Falls dieser Grenzwert existiert, kann er als die Ableitung von f in z_0 aufgefasst werden. Der Beweis folgt aus Satz 2.2 (vgl. Kapitel 2).

Um einen Zusammenhang zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von f in z_0 und der reellen Differenzierbarkeit von u und v in (x_0, y_0) herzustellen, wird der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

untersucht, indem man h entlang der reellen Achse und entlang der imaginären Achse gegen 0 streben lässt (vgl. [6], 39). Für das Streben von $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ entlang der reellen Achse gegen 0 folgt:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)+iv(x_0+h,y_0)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \\
&= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0).
\end{aligned}
$$

Strebt dagegen ih mit $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ entlang der imaginären Achse gegen 0, so folgt analog:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0,y_0+h)+iv(x_0,y_0+h)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{ih} \\
&= \frac{1}{i}\lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{h} \right) \\
&= \frac{1}{i}(u_y(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0).
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Ableitung komplexwertiger Funktionen die Gleichung (vgl. [6], 39):

$$
f'(z_0) = u_x(z_0)+iv_x(z_0) = \frac{1}{i}(u_y(z_0)+iv_y(z_0)) = v_y(z_0)-iu_y(z_0). \tag{3.1}
$$

3.2 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

Mithilfe der Untersuchung der Grenzwerte kann, wenn eine komplexwertige Funktion $f = u + iv$ in zwei reellwertige Funktionen u, v unterteilt wird und die partiellen Ableitungen nach x und y betrachtet werden, auch eine Aussage über die komplexe Differenzierbarkeit mithilfe der sogenannten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen getroffen werden, welche sich direkt aus (3.1) ergeben.

Satz 3.2 Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, wobei $D \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen ist, mit $z_0 \in D$. Ist die Funktion f mit $f = u + iv$ in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so ist sie auch reell differenzierbar, d.h. die reellwertigen Funktionen u und v sind in $(x_0, y_0) \mathrel{\hat{=}} z_0 \in D$ stetig partiell differenzierbar und es gelten in diesem Punkt die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (vgl. [6], 39)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{3.2}$$

Daraus ergibt sich ein hinreichendes Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit:

Hinreichendes Kriterium Die reellwertigen Funktionen u, v von f sind stetig reell differenzierbar und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (3.2) sind erfüllt. Die Ableitung $f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von f wird dann gegeben durch Gleichung (3.1) (vgl. [6], 42).

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen beschreiben analytisch, dass der Differenzenquotient der Funktion f bei der Annäherung an z_0 parallel zur reellen und imaginären Achse denselben Grenzwert hat (vgl. [6], 39).

Der Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit kann gut durch eine Betrachtung des reellen Differentials veranschaulicht werden. Die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ ist durch das Differential

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & v_x(x, y) \\ u_y(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

gegeben. Existieren die stetig partiellen Ableitungen von u, v nach x, y, so ist die Funktion f reell differenzierbar (vgl. [5], 36). Ist das Differential komplex linear (vgl. Kapitel 1.2), so kann daraus geschlossen werden, dass die Funktion f auch komplex differenzierbar ist (vgl. [6], 41). Die $\mathbb{C}$-Linearität des Differentials beinhaltet die Zusatzbedingung zur reellen Differenzierbarkeit: Die Erfüllung der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen.

4 Die komplexe Exponentialfunktion

Im Folgenden soll die komplexe Exponentialfunktion auf ihre komplexe Differenzierbarkeit hin untersucht und ihre komplexe Ableitung bestimmt werden.

Die komplexe Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto e^z$ kann auch, wegen $z = x + iy$, durch $x + iy \mapsto e^{x+iy}$ dargestellt werden. Vorerst werden die reellwertigen Funktionen u und v bestimmt. Dies geschieht durch Trennung des Realteils vom Imaginärteil (vgl. [7], 21–25). Für diese Umformung wird die Euler'sche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ betrachtet, deren Herleitung im Folgenden kurz erläutert werden sollte (vgl. [7], 24–26).

Die komplexe Exponentialfunktion lässt sich als Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} &= \frac{(i\varphi)^0}{0!} + \frac{(i\varphi)^1}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Die Funktionen Sinus und Kosinus lassen sich in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch deuten. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist $|e^{i\varphi}| = 1$, denn es gilt (vgl. [4], 86–87)

$$|e^{i\varphi}|^2 = e^{i\varphi}\overline{e^{i\varphi}} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = e^0 = 1.$$

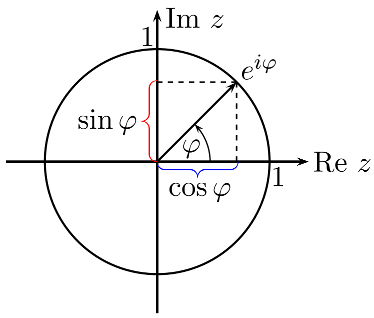

Abbildung 4.1: Einheitskreis.

Demnach ist $e^{i\varphi}$ ein Punkt des Einheitskreises der

Gauß'schen Ebene. Die Projektionen dieses Punktes auf die reelle bzw. imaginäre Achse sind durch $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$ gegeben (vgl. Abbildung 4.1). Aufgrund dessen kann für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert werden:

$$\cos\varphi := \mathrm{Re}(e^{i\varphi})$$
$$\sin\varphi := \mathrm{Im}(e^{i\varphi})$$

Die Funktionen Sinus und Kosinus lassen sich ebenfalls als Potenzreihen entwickeln:

$$\sin\varphi = \varphi - \tfrac{\varphi^3}{3!} + \tfrac{\varphi^5}{5!} - \tfrac{\varphi^7}{7!} \pm \ldots$$
$$\cos\varphi = 1 - \tfrac{\varphi^2}{2!} + \tfrac{\varphi^4}{4!} - \tfrac{\varphi^6}{6!} \pm \ldots$$

Wenn man die Potenzreihe für Sinus mit i multipliziert und anschließend diese mit der Potenzreihe für Kosinus addiert, ergibt sich:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots$$

Das Ergebnis hat die selbe Form wie die Potenzreihenentwicklung der komplexen Exponentialfunktion. Damit ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots = e^{i\varphi}$$

Jetzt können der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion ohne Probleme voneinander getrennt werden:

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^x \cdot (\cos y + i\sin y) \\ &= e^x \cdot \cos y + ie^x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Daraus folgt für $u, v : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(x,y) = e^x \cdot \cos y \quad \text{und} \quad v(x,y) = e^x \cdot \sin y.$$

Um zu prüfen, ob f reell differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, dass die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ nach x und y stetig partiell differenzierbar sind (vgl. [5], 36). Für sie gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cdot \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cdot \sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cdot \cos y$$

Die Funktionen u, v sind nach beiden Variablen partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind stetig (vgl. Kapitel 2).

Neben der reellen Differenzierbarkeit von f müssen auch die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt sein. Dies ist bei der komplexen Exponentialfunktion der Fall:

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cdot \cos y = \tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \cdot \sin y = -\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen werden auf ganz $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ erfüllt und die partiellen Ableitungen sind alle auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Somit ist auch f auf ganz $\mathbb{C}$ stetig komplex differenzierbar. Für die Ableitung an der Stelle $z_0 = x + iy$ (vgl. (3.1)) gilt:

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ &= e^x \cdot \cos y + ie^x \cdot \sin y \\ &= e^x \cdot (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cdot e^{iy} \\ &= e^{x+iy} \end{aligned}$$

Damit kann die Ableitung der komplexen Exponentialfunktion durch $f'(z) = e^z$ dargestellt werden.

5 Holomorphe Funktionen

In der Untersuchung der komplexen Exponentialfunktion wurde festgestellt, dass f mit $f(z) = e^z$ auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist. Auf diesem Ergebnis lässt sich der Fundamentalbegriff der Funktionentheorie, der Begriff der Holomorphie, einführen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wobei $D \subset \mathbb{C}$ offen ist, heißt holomorph in D, wenn f für alle Punkte $z \in D$ komplex differenzierbar ist (vgl. [6], 45). Wenn eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ um einen Punkt $z_0 \in D$ existiert, so heißt f im Punkt z_0 holomorph, falls f in der Umgebung U holomorph ist (vgl. [6], 45).

5.1 Differentiationsregeln

Die Differentiationsregeln, die schon aus dem Reellen bekannt sind, lassen sich ohne Probleme auf das Komplexe übertragen. Zusammensetzungen aus komplex differenzierbaren Funktionen sind ebenfalls wieder komplex differenzierbar, also auch holomorph (vgl. [6], 46). Die Beweise verlaufen ganz analog zum Reellen (vgl. [4], 103–104).

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in D$ holomorph. Für diese Funktionen f, g gilt (vgl. [4], 103–104; [6], 46–47):

i) **Summenregel** $(f + g)$ ist in z_0 holomorph und es gilt
$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

ii) **Produktregel** $(f \cdot g)$ ist in z_0 holomorph und es gilt
$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

iii) **Quotientenregel** $(\frac{f}{g})$ ist in z_0 holomorph (mit $g(z_0) \neq 0 \ \forall \ z_0 \in D$) und es gilt

$$(\tfrac{f}{g})'(z_0) = \tfrac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

iv) **Kettenregel** $(f \circ g)$ ist in z_0 holomorph und es gilt

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0).$$

5.2 Besonderheit gegenüber reellen Funktionen

Trotz einer sehr analogen Definition der komplexen Differenzierbarkeit zum Reellen, unterscheiden sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit dennoch stark voneinander.

Falls f eine in D holomorphe Funktion mit $f : D \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z)$ ist, so kann die Ableitung entsprechend zum Reellen durch

$$f' : D \to \mathbb{C},\ z \mapsto f'(z)$$

definiert werden (vgl. [6], 48). Die Funktion f' ist wiederum komplex differenzierbar, also holomorph in D. Dies ist im Reellen, wo die Ableitung im Allgemeinen nicht einmal mehr stetig ist, nicht der Fall. Indessen ist eine holomorphe Funktion in D sogar beliebig oft komplex differenzierbar in D, das heißt, es existieren alle Ableitungen $f', \ldots, f^{(m)}, \ldots$, welche zusätzlich stetig sind (vgl. [6], 48). Diese Aussage demonstriert den Unterschied zum Reellen sehr deutlich.

6 Schlusswort

Wie zu Beginn bereits erwähnt, stehen die Kriterien für komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie komplexwertiger Funktionen im Vordergrund der Arbeit. Anhand der vorgestellten Ergebnisse kann nun der entscheidende Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit nachvollzogen werden.

Die Betrachtung der Grenzwerte aus Kapitel 3.1 liefert die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ und zeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit weitaus mehr ist als nur eine Analogie zum Reellen. Reelle Differenzierbarkeit ist vielmehr die Voraussetzung für komplexe Differenzierbarkeit. Sie besteht bei einer komplexwertigen Funktion, wenn für f mit $f = u + iv$ die reellwertigen Funktionen u und v reell differenzierbar sind, also die stetig partiellen Ableitungen nach x und y existieren. Komplex differenzierbare Funktionen sind genau die reell differenzierbaren Funktionen, die ein $\mathbb{C}$-lineares Differential besitzen. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen beschreiben indessen diese $\mathbb{C}$-Linearität und sind somit die Zusatzbedingungen zur reellen Differenzierbarkeit.

Unter Verwendung der Aussagen aus Kapitel 4 und 5 kann eine Antwort auf die Fragestellung, ob die komplexe Exponentialfunktion holomorph ist, gegeben werden. Das Ergebnis der Untersuchung ist die Feststellung, dass die komplexe Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist. Laut Kapitel 5 heißt eine Funktion f genau dann holomorph in $\mathbb{C}$, wenn f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist. Daraus kann geschlossen werden, dass die komplexe Exponentialfunktion eine holomorphe Funktion ist, welche unendlich oft komplex differenzierbar ist und eine stetige Ableitung besitzt.

Literaturverzeichnis

[1] Beutelspacher, Albrecht: *Lineare Algebra.* Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag. 6. Auflage. 2003.

[2] Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik.* In: Grosche, G., Ziegler, V. und Ziegler, D. (Hg.): Thun Frankfurt/Main: Harri Deutsch Verlag. 22. Auflage. 1979.

[3] Fischer, Gerd: *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger.* Braunschweig Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag. 12. Auflage. 2000.

[4] Forster, Otto: *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Braunschweig Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag. 4. Auflage. 1976.

[5] Forster, Otto: *Analysis 2. Differentialrechnung im R^n. Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Braunschweig Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag. 5. Auflage. 1984.

[6] Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 1.* Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag. 3. Auflage. 1984.

[7] Stoppel, Hannes: *Nichtlineare Dynamik und die Mandelbrot-Menge im Unterricht.* Gladbeck, 2011.

Erklärung

„Hiermit erkläre ich, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.“