

*Titel:*

# Eine Neue Visualisierung komplexer Funktionen!

*Subtitel:*

## *Ein neuer Ansatz zur Visualisierung komplexer Funktionen zur bildhaften Untersuchung komplexer Zahlen*

### **Kurze Zusammenfassung:**

Es gibt Funktionen wie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (-2)^x$  bei denen die Visualisierung aus der Schule einem nicht mehr weiterhelfen kann. Die weitaus bekannteren reellen Funktionen sind eindimensional und lassen sich hervorragend mit einem zweidimensionalen Gebilde darstellen. Da jedoch die Menge der komplexen Zahlen zweidimensional ist, würde eine ähnliche Visualisierung vierdimensional und außerhalb unseres Darstellungsvermögen sein. Ein neuer Ansatz mit parallelen gaußschen Zahlenebenen soll komplexe Funktionen  $f \in \text{abb}(A \subseteq \mathbb{C}, \mathbb{C})$  übersichtlicher in einem dreidimensionalen Raum machen. Dazu werden Linien, die jeden Eingabewert von einer Ebene mit dem dazugehörigen Funktionswert auf der anderen Ebene verbinden sollen, eingezeichnet. Tatsächlich lassen sich mit derselben Visualisierung bereits bekannte Funktionen neu entdecken und hilfreiche Erkenntnisse gewinnen mit diversen Anwendungen, die sogar dem Wort „komplexe Steigungen“ einen sichtbaren Sinn geben. Die Suche nach der idealen Visualisierung ist gleichzeitig eine Erforschung durch Experimente und ein Versuch Mathematik zugänglicher zu machen.

### **1. Das Problem**

Wie kann man Funktionen  $f \in \text{abb}(A \subseteq \mathbb{C}, \mathbb{C})$  so visualisieren, dass die Verbindung zwischen der Definitionsmenge und Bildmenge erkennbar bleibt? Wir suchen eine Visualisierungsmethode die vielseitig und anschaulich ist, während sie aber gleichzeitig Funktionen von einer unbekanntem Seite

beleuchtet. Das antreibende Problem dieser Erforschung war der Fall, wenn die Basis einer exponentiellen Funktion negativ ist. Beispielhaft dazu ist die Funktion:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$x \mapsto (-2)^x$$

Herkömmliche Visualisierungen mit farbigen Ebenen bei denen nur eine Farbverbindung zwischen Definitionsmenge und Zielmenge besteht sind schön bunt und werden oft als Bilder an die Wand gehangen, doch sind sie unübersichtlich und geben beschränkt Preis welche Eigenschaften diese Funktion besitzt (*siehe Link bei Quellen*). Das Ziel ist eine Visualisierung zu erstellen die jede Veränderung der Eingabewerte mit den Ausgabewerten in Relation setzt, sodass folglich auch der Begriff „komplexe Steigungen“ sinnreich ist. Sie soll einfach zu verstehen sein und in Kürze dem Betrachter Eigenschaften der Abbildung preisgeben.

Die Mathematik ist längst nicht ausschließlich mit Bildern zu beschreiben, doch das wenige was mit Bildern doch noch ansatzweise erkennbar gemacht werden kann, ist eine große Hilfe für jeden Lernenden. So ist z.B. die herkömmliche Visualisierung reeller Funktionen durch das kartesische Koordinatensystem nicht mehr wegzudenken. Da die komplexen Zahlen sehr wichtig in Mathematik, Forschung und Anwendung sind, ist es auch wichtig den Umgang mit komplexen Zahlen zu verinnerlichen. Meine Hoffnung ist es Mathematik zugänglicher zu machen, weshalb ich mir zur Aufgabe gemacht habe Funktionen wie  $(-2)^x$  ein verständliches Bild zu geben. Erst als Konsequenz dieser Untersuchung hat sich für mich ergeben das viele komplexe Funktionen tatsächlich Formen enthalten wie sie in der Natur vorkommen. Die Entdeckung dieser Formen mag zwar ein Zufall gewesen sein, doch bin ich fest davon überzeugt, dass Experimente und Mathematik gut zusammengehören, wenn die Ansammlung an Information, die man berücksichtigen muss, zu unübersichtlich wird. Experimente geben neuen Stoff zum Nachforschen, wie wir auch hier später sehen werden. Die Natur der „komplexen Zahlen“ ist vielen ein Mysterium da sie eine Größe darstellt, die mit unserem Wahrnehmen nicht vereinbar ist. Es existieren jedoch viele Zusammenhänge zwischen komplexen Zahlen und der Realität.

## 2. Wissenswertes

Eine wichtige Eigenschaft die wir für den Verlauf der Lösung brauchen, ist dass die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  isomorph zum  $\mathbb{R}^2$  ist. Diese Aussage ist allgemein bekannt, doch muss sie angesichts ihrer großen Bedeutung für den Lösungsweg nochmals erläutert werden. Eine beliebige komplexe Zahl lässt sich schreiben als  $c = a + bi$   $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i: i^2 = -1$  und jeder Vektor vom  $\mathbb{R}^2$  durch  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}: x, y \in \mathbb{R}$ . Der Vektorraum  $\mathbb{C}$  über den Körper  $\mathbb{R}$  besitzt die Basis  $\{1, i\}$ , also gilt  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ . Nun existiert eine bijektive und linearen Abbildung (ein Isomorphismus)  $\varphi$  von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Diese Abbildung definieren wir als:

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Der Isomorphismus alleine erlaubt uns Operationen im anderen Raum auszuführen bevor wir dann das Ergebnis wieder zurückführen. Doch an diesem Isomorphismus existiert noch ein weiteres

hilfreiches Detail, und zwar dass bezüglich der für die beiden Mengen üblichen euklidischen Norm nicht nur die Beträge gleich sind, sondern auch das Argument im kartesischen Koordinatensystem.

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|$$

$$\arg(a + bi) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) & \text{für } b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) & \text{für } b < 0 \\ \text{unbestimmt für } & a = b = 0 \end{cases} = \arg\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$$

Da wir zusätzlich die Achsen der gaußschen Zahlenebene für  $\mathbb{C}$  und die des kartesischen Koordinatensystems für  $\mathbb{R}^2$  auf gleiche Weise beschriften, können wir jeder komplexe Zahl  $c$  mit jedem Vektor  $\varphi(c) = \begin{bmatrix} \text{Re}(c) \\ \text{Im}(c) \end{bmatrix}$  im kartesischen Koordinatensystem den exakt selben Punkt zuordnen. Damit werden alle visuellen Eigenschaften des normierten Vektorraumes  $\mathbb{R}^2$  auch für  $\mathbb{C}$  gültig.

### 3. Visualisierung

Die Grundidee ist es zwei komplexe Zahlenebenen  $\mathbb{C}$  durch den isomorphen Partner  $\mathbb{R}^2$  als Definitionsmenge und Zielmenge parallel im  $\mathbb{R}^3$  zueinander auszurichten. Anschließend wird von jedem Element der Definitionsmenge eine Verbindungslinie zum Funktionswert in der Zielmenge eingezeichnet.

Für die Visualisierung brauchen wir jetzt erst mal den  $\mathbb{R}^3$  reellen Raum in den wir zwei Ebenen festlegen. Wir definieren diese Mengen:

$$\mathbb{C}_D := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ "Definitionsmenge"}$$

$$\mathbb{C}_Z := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ "Zielmenge"}$$

Dies entspricht zwei Ebenen die parallel zur x-y Ebene und parallel zueinander sind, wobei die Definitionsmenge  $\mathbb{C}_D$  auf der x-y Ebene liegt und  $\mathbb{C}_Z$  genau um „1 z-Element“ höher. Die Mengen sind mit dem Buchstaben  $\mathbb{C}$  versehen da diese durch den Isomorphismus  $\mathbb{C}$  simulieren sollen. Da wir im  $\mathbb{R}^3$  sind können wir nicht einfach  $\varphi$  benutzen. Stattdessen brauchen wir zwei neue Funktionen:

$$\omega: \mathbb{C}_D \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto a + bi$$

$$\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_Z$$

$$a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

Und unsere komplexwertige Funktion, die wir visualisieren wollen:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a + bi \mapsto f(a + bi)$$

Die eben genannten Funktionen erlauben es uns nun komplexe Funktionen im  $\mathbb{R}^3$  zu repräsentieren, wie man am folgenden Diagramm gut erkennen kann (**Abbildung 1**):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \uparrow \omega & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{C}_D & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}_Z \end{array}$$

(Abbildung 1) Wir visualisieren mit  $\sigma \circ f \circ \omega$ .

Folglich ist die Funktion die wir eigentlich visualisieren  $h = \sigma \circ f \circ \omega$ . Unser Ziel ist es nun zu allen  $z \in A \subseteq \mathbb{C}_D$  eine Linie im  $\mathbb{R}^3$  mit  $f(z) \in \mathbb{C}_Z$  einzuzeichnen. Im Hinterkopf vergessen wir nicht, dass wenn  $z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$  folgende Gleichung gilt:  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma(a + bi) = \sigma\left(\omega\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \sigma(\omega(z))$ . Nun bilden wir mit jedes  $z \in A \subseteq \mathbb{C}_D$  eine Menge in Form einer Linie die  $z$  mit  $\sigma(f(\omega(z)))$  verbindet. Die Vereinigung dieser Menge bildet dann unseren Graphen. Eine Funktion, die aus einer Funktion  $f$  und einer Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{C}_D$  den Graphen bildet, definieren wir so:

$$G: \text{abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \times (A \subseteq \mathbb{C}_D) \rightarrow \mathbb{C}_Z$$

$$f, A \mapsto \bigcup_{z \in A \subseteq \mathbb{C}_D} \left\{ (1 - \lambda) * z + \lambda * \sigma(f(\omega(z))) : 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

Jetzt brauchen wir nur noch die Menge  $G(f, A)$  im  $\mathbb{R}^3$  einzuzeichnen, was mit der heutigen Software und Computern absolut kein Hindernis ist. Die Definitionsmenge  $A$  kann je nach Verlangen geformt werden, doch da es allgemein einem Computer nicht möglich ist mit Unendlichem zu arbeiten, muss man diese Menge  $A \subseteq \mathbb{C}_D$  beschränken und mit endlich vielen Punkten so dicht wie möglich ausfüllen.

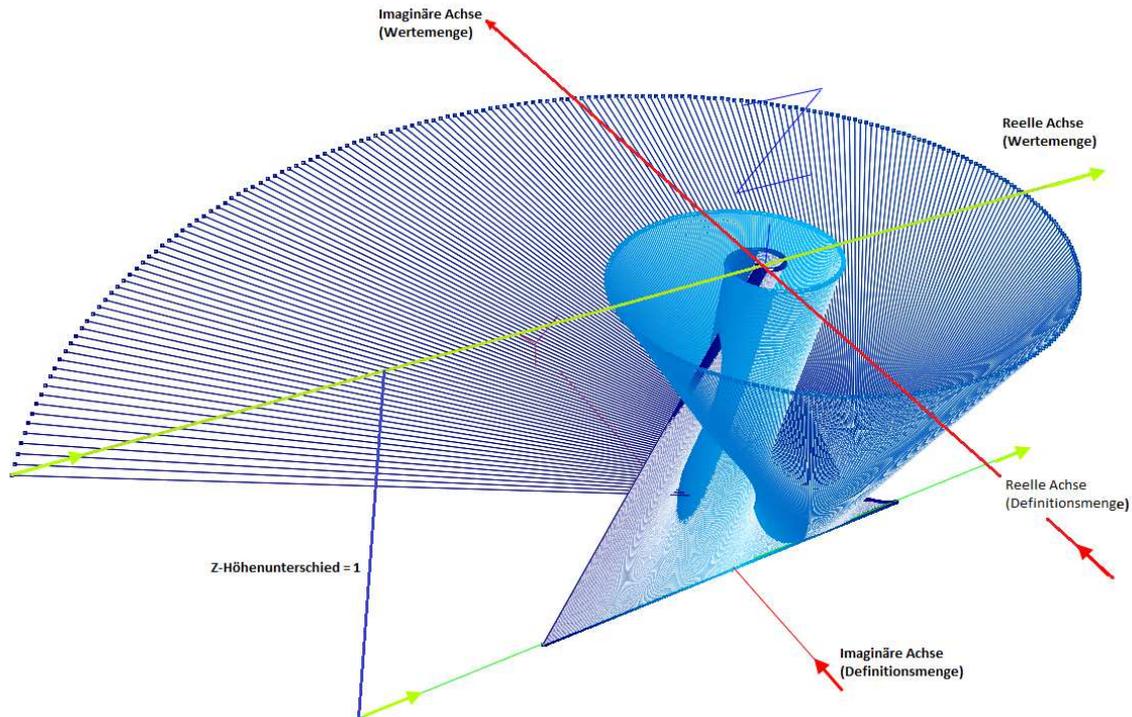
## 4. Resultat der Visualisierung

### 4.1 Visualisierungen mit reellen Intervallen

Die Programmierung der Visualisierung ist softwareabhängig und keine Hindernis zur Entfaltung der Idee. Für die folgenden Resultate habe ich die (für Windows) kostenfreie Software *SpaceTime 4.0<sup>TM</sup>* von [www.spacetime.us](http://www.spacetime.us) verwendet (*siehe Quellen*). Für die Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{C}$  habe ich als erstes ein endliches reelles Intervall ausgewählt,  $A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \right\}$ , wofür  $\omega(A) = [a, b]$ . Da ich endlich viele Punkte wählen muss, zerlege ich das Intervall in  $n \in \mathbb{N}$  Zahlen wobei all diese Zahlen den selben Abstand zu ihren Nächsten behalten. Bei der Visualisierung wähle ich dann ein  $n \in \mathbb{N}$  so groß wie möglich ohne das die Software abstürzt bzw. nicht schnell genug aufhört zu Rechnen. Sei nun  $a = -3$  und  $b = 3$ . Außerdem ist es wichtig festzulegen, dass  $\ln(-1) = i\pi$  ist und keine weitere periodische Lösung von  $e^x = -1$  angenommen wird. Dann gilt:

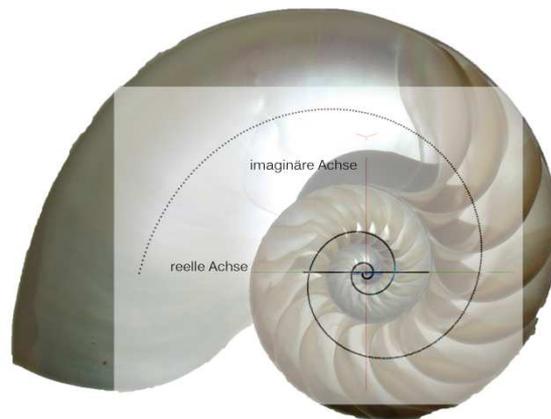
$$(-2)^x = (2(-1))^x = 2^x(-1)^x = 2^x e^{\ln(-1)x} = 2^x e^{i\pi x}$$

Nun Zeichnen wir den Graphen  $G((-2)^x, [-3, 3])$  ein (**Abbildung 2**):



(Abbildung 2)  $G((-2)^x, [-3, 3]) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Eine sehr anschauliche Form.

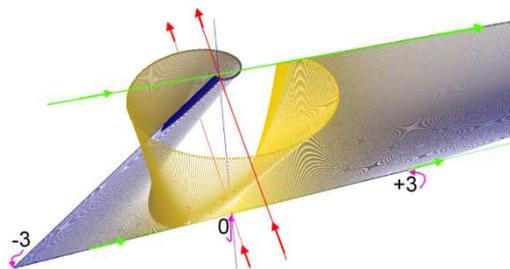
Wie man gut sehen kann, entsteht eine logarithmische Spirale wie sie in der Natur bei der Nautilusspirale vorkommt (**Abbildung 3**). Hier wird deutlich wieso wir diese Art der Visualisierung gewählt haben. Als Betrachter kann man hervorragend erkennen, welchen Trend die Funktion nimmt für steigende und fallende reelle Zahlen.



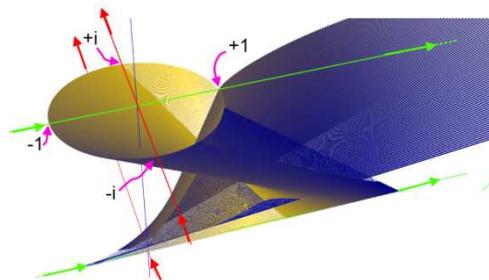
(Abbildung 3) Die Nautilusspirale und die Menge  $\mathbb{C}_z$  von **Abbildung 1** von oben verglichen. Die passende Funktion wäre  $(-\phi)^x$  wobei  $\phi$  der goldene Schnitt ist.

Wie man sieht ist es sehr nützlich die Linien zu färben. Theoretisch sollten alle Streckensegmente zusammen eine dichte gebogene Fläche bilden, doch dies war nicht möglich da ich in der Software nur endlich viele und zu wenig Linien einzeichnen konnte bevor die Grenzen der Software erreicht waren. Oben hatten wir gesagt das die „z-Höhe“ von  $\mathbb{C}_z$  um „eins höher“ lag, doch für die meisten Fälle ist es sinnvoll diese Höhe neu zu skalieren. Auf dem Bild der ersten Visualisierung musste ich die Achsen selber hineinarbeiten da, *SpaceTime 4.0* dies nicht tut. Außerdem sind keine Zahlenwerte auf den Achsen eingezeichnet, doch so etwas ist nur eine Einschränkung der Software und kann problemlos bei anderer Software eingefügt werden.

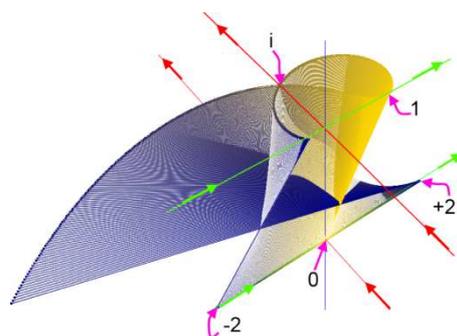
Hier sind ein paar weitere Funktionen visualisiert worden, die alle eine reelle (mit nur einer Veränderlichen) Definitionsmenge haben (**Abbildungen 4,5,6**)



(Abbildung 4)  $G(x^x, [-3, 3])$ . Man erkennt den Übergang zur außergewöhnlichen Spirale.

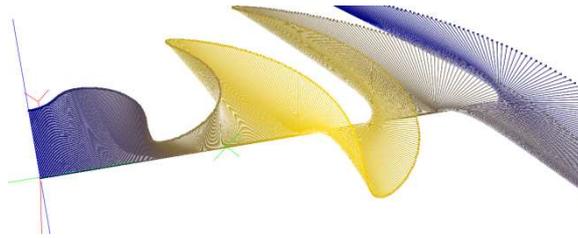


(Abbildung 5)  $G(x^{xi}, [-3, 3])$ . Ein Einheitskreis bildet sich.



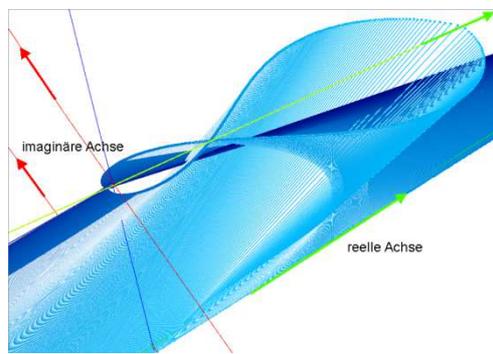
(Abbildung 6)  $G((xi)^x, [-2, 2])$ . Eine ästhetische Schleife entsteht.

Weiter interessant ist der Graph der Funktion  $f(x) = x e^{\frac{i\pi \sin(x)}{4}}$ . Durch den immer größer werdenden Abstand ( $|f(x)| = x$ ) und den periodischen Winkel ( $\arg(f(x)) = \frac{\pi}{4} \sin(x)$ ) entsteht eine sich vom Nullpunkt ausbreitende Welle. Diese Funktion kann man auch leicht überarbeiten um sie an anderen Wellen anzupassen. Somit könnte man mit komplexen Zahlen Wellen simulieren (**Abbildung 7**).

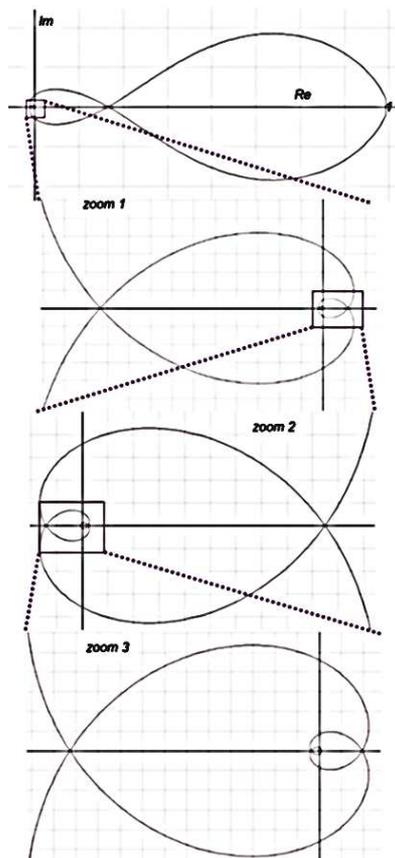


(Abbildung 7)  $G\left(xe^{\frac{i\pi\sin(x)}{4}}, [0, 3]\right)$ . Die Welle breitet sich mit konstanter Geschwindigkeit auf  $90^\circ$  aus.

Eine Funktion mit ganz besonderen Eigenschaften die experimentel entdeckt wurde ist  $f(x) = (xi)^{xi}$  (**Abbildung 8**). Beim Zoomen um den Nullpunkt erkennt man das es sich um eine selbst-ähnliche Struktur handelt. Hierfür haben wir auch ein 2-D Bild von  $\mathbb{C}_z$  damit man dort besser hineinzoomen kann (**Abbildung 9**).



(Abbildung 8)  $G((xi)^{xi}, [-10, 10])$ . Die Schleife wird immer kleiner für betragsgroße  $z$ .



(Abbildung 9). 2-D Bild zum Zoomen um den Nullpunkt zur Abbildung 8.

Hierbei könnte man sich jetzt viele neue Fragen stellen wie z.B.: „Warum wiederholt sich die Struktur der Funktion?“, „Um welchen Faktor werden die Flächen kleiner?“ oder „Wann nimmt die Funktion rein reelle Werte an? Welche sind es?“ Durch die Ergebnisse könnte man neue Zusammenhänge finden wie sie vielleicht auch in der Natur oder anderen Problemen vorkommen.

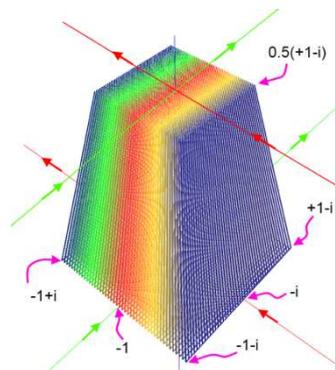
## 4.2 Visualisierung mit komplexen Teilmengen

Nun sei der Auswahl der Menge kein Limit gesetzt. Für die folgenden Visualisierung habe ich die Definitionsmenge  $A$  als ein Rechteck in  $\mathbb{C}_D$  definiert:

$$A(a, b, c, d) := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \right\}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

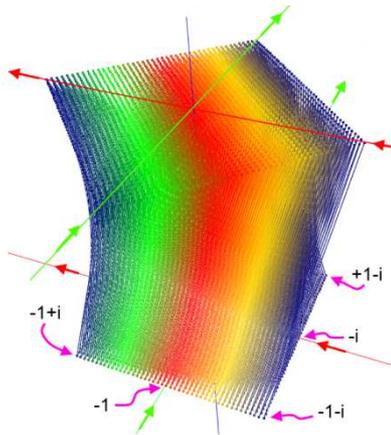
Im Grunde kann man sich jede Menge in  $\mathbb{C}$  als Kompositionen von Funktionen auf reellen Intervallen, die simultan visualisiert werden, vorstellen. Doch wenn man sich die dazugehörigen Graphen anschaut, erkennt man eine neue Anwendung der Visualisierung. Zum Beispiel ist es bekannt, dass bei der Multiplikation mit einer komplexen Zahl die Beträge multipliziert und die Argumente addiert werden. Komplexe Zahlen haben den Vorteil, dass sie bequem als Polarform ausgeschrieben werden können, und zwar als  $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \arg(a+bi)}$ . Diese Form erleichtert die Multiplikation zweier komplexer Zahlen, was im Übrigen eine Eigenschaft ist die  $\mathbb{R}^2$  nicht besitzt und weshalb meiner Meinung nach  $\mathbb{C}$  tauglicher ist für allgemeine Visualisierungen auf einer Fläche.

Nehmen wir eine beliebige Teilmenge  $A$  und ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so können wir die Menge  $A$  neu skalieren durch  $\lambda * A := \{c * \lambda : c \in A\}$  (**Abbildung 10**).



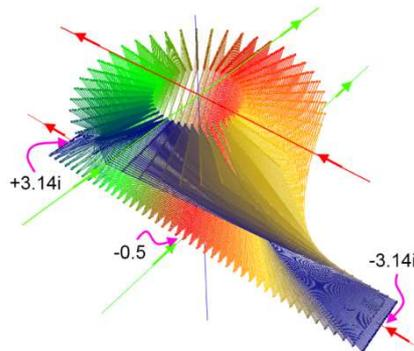
(Abbildung 10)  $G(c * 0.5, A(-1, 1, -1, 1))$  Das Rechteck wird eingeschränkt.

Nehmen wir eine beliebige Teilmenge  $A$ , so erfüllt  $e^{i\theta} * A := \{c * e^{i\theta} : c \in A\}$  eine Rotation jedes Elementes von  $A$  um genau den Winkel  $\theta \in [-\pi, \pi)$  (**Abbildung 11**).

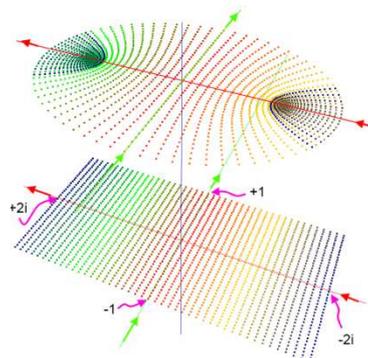


(Abbildung 11)  $G\left(ce^{\frac{i\pi}{4}}, A(-1, 1, -1, 1)\right)$ . Das Quadrat wird um  $90^\circ$  gedreht.

Experimentell habe ich auch gefunden, dass  $e^A$  aus dem Rechteck von  $A$  ein Kreis mit Loch bildet (Abbildung 12), oder wie  $\sinhyp(A)$  aus dem Rechteck  $A$  eine Ellipse formen kann (Abbildung 13).



(Abbildung 12)  $G(e^c, A(-0.5, 0.5, -\pi, \pi))$ .



(Abbildung 13)  $G(\sinhyp(c), A(-1, 1, -2, 2))$ . Nur mit Punkten damit man die Ellipse gut sehen kann.

Noch gibt es viele Funktionen bei denen die Art der „Transformation des Rechteckes“  $A$  ich nicht untersucht habe, doch bin ich zuversichtlich das es noch viele nützliche Formen gibt. Andernfalls kann man schließlich die menge  $A$  anders definieren um andere Formen zu kriegen. Eine gute Anwendung wäre diese Visualisierung zu Formtransformation in Programmen wie Bildbearbeitung oder Zeichnung. Durch Kompositionen verschiedener Funktionen lässt sich eine Menge skalieren,

rotieren, scheren und zu einer Ellipse transformieren wenn man nur die passenden Funktionen dafür kombiniert.

### 4.3 Ableitungen im $\mathbb{C}$

Wir setzen voraus das  $f$  differenzierbar ist. Die ausführliche Erläuterung der Verwandtschaft zwischen  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2$  diene dazu die Eigenschaften der Differentialmathematik von Funktionen (Kurven) wie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf  $\mathbb{C}$  zu übertragen. Da  $f'(a + bi) = \text{Re}(f'(a + bi)) + \text{Im}(f'(a + bi))i$  ist, gilt, dass der Betrag und das Argument einer „komplexen Steigung“ gleich dem Betrag und dem Argument von  $\begin{bmatrix} \text{Re}(f'(x)) \\ \text{Im}(f'(x)) \end{bmatrix}$  ist. Da wir unsere Mengen in einer Ebene im  $\mathbb{R}^3$  eingezeichnet haben, können wir auf ihre Interpretationen der Differentialmathematik in der Visualisierung erklären, bloß das die x-Komponente eines Vektors immer dem Realteil und analog die y-Komponente dem Imaginärteil entspricht. Wenn man sich komplexe Zahlen als Pfeile vom Ursprung aus vorstellen will, so zeigen diese Pfeile von  $f'(x)$  immer in Richtung der Tangente und die Länge des Pfeiles bestimmt die „Geschwindigkeit“ mit der sich der Pfeil in diese Richtung bewegt.

Die obige Beschreibung gilt nur für Funktionen mit einem Eingabewert, jedoch haben komplexe Zahlen grundsätzlich zwei unabhängige Eingabewerte, und zwar den Real und Imaginärteil. Daher müssen wir die Differentialmathematik für Funktionen wie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachten. Doch um keine  $2 \times 2$  Jacobi-Matrix zu erhalten führen wir eine Richtungsableitung durch. Dazu nehmen wir einen Punkt  $w \in \mathbb{C}$  den wir ableiten wollen. Dann nehmen wir ein  $e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  und leiten die Funktion an der Stelle  $w$  ab mit:

$$f'_\theta(w) := \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(w + ke^{i\theta}) - f(w)}{k}$$

Somit erhalten wir auch einen komplexen „Pfeil“ der aber davon abhängig ist in welcher „Richtung  $\theta$  sich  $w$  in der Definitionsmenge ändert.“ Sobald man nämlich einen festen Winkel  $\theta$  hat ist die komplexe Zahl nur noch von einer Veränderlichen abhängig, eine Folgerung die direkt aus der Polarform jeder komplexen Zahl kommt. Man würde zu jedem  $\theta$  eine eigene „komplexe Steigung“ erhalten, doch kann man die Ableitung trotzdem für feste Richtungen  $\theta$  und veränderliche  $w \in \mathbb{C}$  graphieren.

Vom experimentellen Interesse wäre es aber auch  $w \in \mathbb{C}$  fest zu wählen und veränderliche  $\theta \in [-\pi, \pi)$  zu visualisieren. Dazu müsste man nur passende Eingabewerte definieren.

$$A := \{\theta \in \mathbb{R}: \pi < \theta \leq \pi\}$$

$$G(A, f'_\theta(w))$$

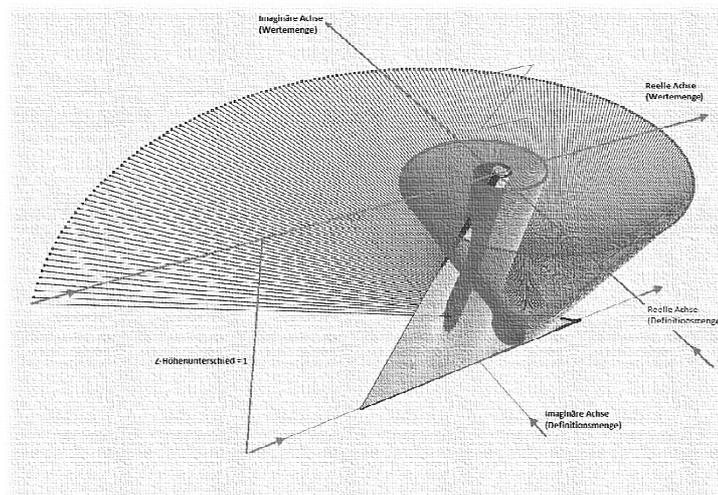
Diese Visualisierung ist dann nur eine Beobachtung vom Verhalten der Funktion in einem einzigen Punkt. Zu einer genaueren Erforschung solcher Ableitungen werde ich mich bei meiner nächsten Arbeit beschäftigen.

## 5. Perspektiven

Das Ziel war es, die komplexen Zahlen verständlicher zu machen und dazu kann diese leicht zu verstehende „Visualisierung komplexer Funktionen“ einen wichtigen Beitrag leisten, denn die Vorstellung von imaginären Zahlen ist in der Tat ein Hindernis für viele Lernende, womit ich mir erhoffe, dass hiermit das Verständnis leichter wird oder der Lehrer es leichter haben wird den Lernenden sein Wissen zu vermitteln (oder neue Interessenten zu gewinnen). Während der Benutzung der Visualisierung habe ich Tatsachen kennengelernt, die ohne dieser experimentellen Erforschung viel schwerer zu erkennen sind. Dazu gehört die logarithmische Spirale, die selbstähnliche Struktur, die Formtransformation durch komplexe Funktionen oder die Wellensimulation. Die Untersuchung des Anfangsproblems hat hunderte neuer Fragen eröffnet, die vielleicht großartige Erkenntnisse etwas näher bringen mit denen man das Verständniss für das natürliche Aufkommen komplexer Zahlen in der Natur verschärfen kann. Wir fassen alle Vorteile dieser Visualisierung zusammen:

- Vorstellung komplexer Funktionen  $\Rightarrow$  komplexe Zahlen leichter lernen/lehren
- Naturrelevanz komplexer Zahlen  $\Rightarrow$  Simulation mit Visualisierung
- Experimentelle Erforschung komplexer Funktionen  $\Rightarrow$  neue Phänomene (leichter) entdecken
- Kompositionen komplexer Funktionen  $\Rightarrow$  einfache 2D-Formtransformationen
- Nahe Verwandtschaft von  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$  verständliche Differentialmathematik auf  $\mathbb{C}$

Außerdem lässt sich diese Visualisierung mit reellen Intervallen gut in Schwarz-Weiß drucken (**Abbildung 14**).



(Abbildung 14)  $G((-2)^x, [-3, 3])$ . Schwarz-Weiß in erhöhter Schärfe.

Marcel Padilla, Berlin November 2011

## Quellen

Rechensoftware, die ich empfehle und der ich danke:

SpaceTime 4.0 von *Pomegranate Software*

<http://www.spacetime.us/>

Foto der Nautilusspirale:

<http://www.emeraldremedialtherapies.com.au/wp-content/uploads/2009/09/NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg>

Link zur herkömmlichen Visualisierung:

<http://my.fit.edu/~gabdo/function.html>