

Gymnasium Petrinum Dorsten

**KRÜMMUNGSKREISE
UND IHRE BEDEUTUNG
FÜR DIE BESTIMMUNG VON
MAXIMALGESCHWINDIGKEITEN
IN STRASSENKURVEN**

Facharbeit im Leistungskurs (L1)

Mathematik (Frau Merge)

von

SAMUEL HILBRICHT

Schuljahr 2020/21

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung.....	3
2 Zentripetalkräfte.....	4
3 Krümmungskreise.....	5
3.1 Qualitative Vorüberlegungen.....	5
3.2 Kreise.....	6
3.2.1 Definition.....	6
3.2.2 Tangente und Normale.....	7
3.3 Quantitative Herleitung und Grenzwertbetrachtung.....	7
4 Anwendung.....	12
5 Fazit.....	14
Anhang: Modellierung des Kurvenverlaufs.....	15
Literaturverzeichnis.....	17
Eigenständigkeitserklärung.....	18

1 Einleitung

Immer wieder kommt es aufgrund von nicht angepasster Geschwindigkeit zu schweren Verkehrsunfällen. Besonders risikoreich sind Straßenkurven, da ein Fahrzeug beim Durchfahren einer Kurve oft großer Krafteinwirkung ausgesetzt ist. Bei schlechten Witterungsverhältnissen und einer Überschreitung der zulässigen Höchstgeschwindigkeit kann es schnell passieren, dass die Bodenhaftung der Reifen den auftretenden Kräften nicht mehr standhält. Das Fahrzeug kann dann nicht mehr sicher auf seiner Fahrbahn gehalten werden.

Derartige Umstände führten am 23. Februar 2016 dazu, dass ein 29-jähriger Mann, der mit seinem Auto auf der Bestener Straße (L104) von Kirchellen kommend in Richtung Gahlen unterwegs war, in einer Linkskurve die Kontrolle über sein Fahrzeug verlor. Er kam nach rechts von der Fahrbahn ab und prallte frontal gegen einen Baum am Fahrbahnrand. Der eingeklemmte Fahrer wurde in einer langwierigen Rettungsaktion aus dem Wrack seines Autos befreit und schwerverletzt ins Krankenhaus eingeliefert. Die Polizei stellte bei der Untersuchung des Fahrzeugs nachfolgend fest, dass der alkoholisierte Fahrer die Kurve mit einer Geschwindigkeit im dreistelligen km/h-Bereich befahren hatte.¹

Fälle wie dieser zeigen, wie wichtig es ist, dass Verkehrsplaner gründlich überlegen, welche Höchstgeschwindigkeit in einer Kurve jeweils zugelassen werden sollte. Im Rahmen dieser Facharbeit soll daher untersucht werden, mit welcher Geschwindigkeit die genannte Kurve in der Bestener Straße höchstens befahren werden kann, sodass es gerade noch möglich ist, ein Fahrzeug sicher auf seiner Fahrbahn zu halten. Dazu soll eine Methodik erarbeitet werden, mit deren Hilfe sich im Allgemeinen die Fliehkräfte an jedem Punkt einer Kurve rechnerisch bestimmen lassen. Nach einigen qualitativen Vorüberlegungen bezüglich der Kräfte, die auf ein Fahrzeug während der Fahrt in einer Kurve einwirken, wird es sich als notwendig erweisen, eine Vorgehensweise zur Berechnung sogenannter Krümmungsradien zu entwickeln. Um diese Betrachtungen möglich zu machen, wird als wesentlicher Punkt die Thematik der Krümmungskreise erschlossen. Sie wird basierend auf den Erkenntnissen aus den vorangegangenen Kapiteln quantitativ hergeleitet. Schlussendlich werden die Ergebnisse der Arbeit am Beispiel der Kurve in der Bestener Straße demonstriert und in Bezug auf den dort stattgefundenen Unfall diskutiert.

1 Vgl. DORSTENER ZEITUNG (o. V.) 24.02.2016: 29-Jähriger bei Unfall im Auto eingeklemmt. In: Dorstener Zeitung. [<https://www.dorstenerzeitung.de/schermbeck/29-jaehriger-bei-unfall-im-auto-eingeklemmt-161281.html>, gefunden am 06.12.2020]

2 Zentripetalkräfte

Bevor man über die zulässige Geschwindigkeit beim Befahren von Straßenkurven urteilen kann, muss man sich zunächst die Frage stellen, welche fundamentalen Einflussfaktoren zu berücksichtigen sind. Als Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen dient daher die folgende Situation: Ein beliebiges Kraftfahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit eine geradlinige Straße entlang. In diesem Fall befindet sich das Fahrzeug in einem Zustand gleichförmiger Bewegung. Gemäß dem ersten Newton'schen Axiom ist die gleichförmige Bewegung der natürliche Bewegungszustand eines massebehafteten Körpers, wenn keine Kräfte auf ihn einwirken.² Es darf folglich angenommen werden, dass das Gefährt zu diesem Zeitpunkt nicht unter dem Einfluss äußerer Kräfte (die Gravitation ausgenommen)³ steht.

Man betrachte des Weiteren den Fall, dass sich das Fahrzeug nun auf eine Kurve zubewegt und in diese einfährt. Mit dem Einfahren in die Kurve ist zwangsläufig eine Änderung der Bewegungsrichtung verbunden. Aus dem oben beschriebenen Newton'schen Trägheitsprinzip ergibt sich, dass für eine Änderung der Geschwindigkeit stets die Einwirkung einer Kraft vonnöten ist. Dies gilt sowohl für eine Änderung im Betrag der Geschwindigkeit als auch für eine Änderung der Bewegungsrichtung.⁴ Demnach muss also, wann immer ein Körper aus seiner geradlinigen Bewegung auf eine krummlinige Bahn abgelenkt wird, eine Kraft aufgewendet werden, die senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung angreift.⁵ Solche Kräfte, die bewegte Körper auf krummlinige Bahnen zwingen, werden Zentripetalkräfte genannt.⁶

Ein im Fahrzeug sitzender Beobachter, der sich relativ zu seinem Bezugssystem in Ruhe befindet, empfindet aufgrund seiner Massenträgheit unter der Einwirkung einer Zentripetalkraft auf das Fahrzeug eine betragsmäßig gleich große Kraft, die jener allerdings entgegen gerichtet ist. Diese Kraft wird Zentrifugalkraft, oder auch Fliehkraft, genannt und ist nur in dem Bezugssystem des bewegten Objektes zu messen.⁷ Zentripetalkräfte und Zentrifugalkräfte treten stets paarweise auf und unterscheiden sich jeweils nur,

2 Vgl. RUHLÄNDER, MICHAEL 2014: Aufstieg zu den Einsteingleichungen. Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin: Pro BUSINESS, S. 63-64.

3 Die Gravitation ist in diesem Gedankenexperiment zu vernachlässigen, weil sie senkrecht zu der Ebene wirkt, auf der sich das Gefährt bewegt. Seine Bewegung wird daher nicht beeinflusst.

4 Vgl. RUHLÄNDER 2014, S. 64.

5 Auch Kräfte, die schräg zur Bewegungsrichtung wirken, können in jeweils eine zur Bewegungsrichtung parallele und eine senkrechte Kraftkomponente zerlegt werden. Die parallele Komponente bewirkt eine Erhöhung des Geschwindigkeitsbetrages, während die senkrechte Komponente zu einer Richtungsänderung führt.

6 Vgl. BERGMANN, MARTIN et al. (Red.) 2007: Schülerduden Physik. Das Fachlexikon von A-Z. 6., neu bearb. Aufl. Mannheim: Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, S. 502.

7 Vgl. ebd., S. 502, 503.

abhängig vom gewählten Bezugssystem, in ihrer Richtung. Da ihre Beträge jedoch übereinstimmen, gelten die erarbeiteten Formeln für beide Kräfte gleichermaßen.

Die quantitative Bestimmung von Zentripetalkräften erfolgte erstmals für den Fall von Kreisbewegungen. Newton, der bei der Entwicklung einer entsprechenden Formel auf Erkenntnisse Galileis zurückgriff, ermittelte durch theoretische Überlegungen die folgende Beziehung:

$$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnen F_Z den Betrag der Zentripetalkraft, m die Masse des bewegten Objektes, v seine Umlaufgeschwindigkeit und r den Radius der Kreisbahn.⁸

3 Krümmungskreise

Gleichung⁹ (2.1) lässt sich ausschließlich auf den Fall exakt kreisförmiger Bahnen anwenden. Übertragen auf reale Straßenverläufe würde dies bedeuten, dass man die Fliehkräfte bestenfalls nur in annähernd kreisförmigen Kurven, wie beispielsweise Autobahnausfahrten, berechnen könnte. Es stellt sich jedoch das Problem, dass die meisten Kurven nicht diesem Ideal entsprechen. Um auch in solchen Fällen Aussagen über die aufzubringenden Zentripetalkräfte, respektive die auftretenden Fliehkräfte, treffen zu können, kann man sich ein Verfahren aus der mathematischen Analysis zu Nutze machen. Die Rede ist von der Bestimmung von Krümmungskreisen an einer ebenen Kurve.

3.1 Qualitative Vorüberlegungen

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, die den Straßenverlauf in der Umgebung einer betrachteten Kurve möglichst realitätsgetreu modelliere. Für die folgenden Überlegungen nehme man an, dass ein beliebiges Fahrzeug der Masse m diese Kurve mit konstanter Geschwindigkeit v entlangfähre. Auf den ersten Blick spräche nun einiges für die Vermutung, dass ein Insasse in dem Fahrzeug an jedem Punkt der Kurve unterschiedlich große Fliehkräfte messen würde. Um diese Vermutung zu überprüfen, soll versucht werden, den Betrag der Fliehkraft an einem beliebigen Punkt P auf der Kurve vorerst näherungsweise zu bestimmen.

Der grundlegende Gedanke ist dabei folgender: Man betrachte einen hinreichend kleinen Kurvenabschnitt in der Umgebung des Punktes P , an welchem man die Fliehkräfte

⁸ Vgl. GASSNER, JOSEF M. UND MÜLLER, JÖRN 2019: Können wir die Welt verstehen? Meilensteine der Physik von Aristoteles zur Stringtheorie. Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag GmbH, S. 72-74.

⁹ Im Folgenden durch Gl. abgekürzt.

ermitteln will, und interpretiere ihn als Teil eines Kreisbogens (Abb. 1).¹⁰ Nun ließe sich lokal kaum mehr unterscheiden, ob sich das Gefährt auf der durch die Funktion $f(x)$ vorgegebenen Bahn oder auf einer Kreisbahn bewegt. Dies hätte wiederum zur Folge, dass man die Bewegung des Fahrzeugs für einen kurzen Zeitabschnitt als exakt kreisförmig annehmen, und somit die Formel zur Berechnung der Fliehkräfte anwenden dürfte.

Man bezeichnet denjenigen Kreis, welcher eine gegebene Kurve in der Umgebung eines Punktes bestmöglich approximiert, als Krümmungskreis. Seinen Mittelpunkt bezeichnet man als Krümmungsmittelpunkt, der zugehörige Radius wird Krümmungsradius genannt (Abb. 1).¹¹ Die oben dargestellte Überlegung soll nun im Weiteren vertieft und mathematisch ausgearbeitet werden.

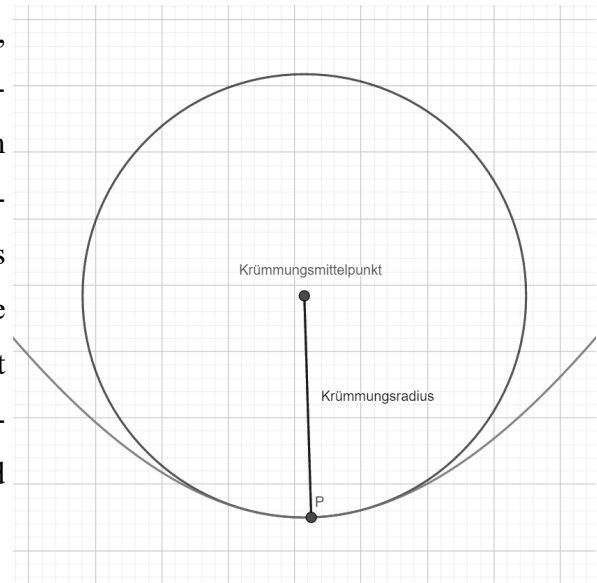


Abbildung 1: Krümmungskreis

3.2 Kreise

Um eine Methode entwickeln zu können, mit deren Hilfe sich der Krümmungskreis einer Funktion an einer beliebigen Stelle eindeutig bestimmen lässt, sind zunächst einige allgemeine Vorüberlegungen zu Kreisen und ihren Eigenschaften notwendig.

3.2.1 Definition

Ein Kreis k ist definiert als die Menge aller Punkte in einer Ebene E , die einen konstanten Abstand r zu einem Mittelpunkt $M \in E$ haben.¹² Formal bedeutet das:

$$k = \{ X \in E \mid \overline{MX} = r \}$$

Liegt der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung, so führt diese Definition unter Zuhilfenahme des pythagoreischen Lehrsatzes zu der Kreisgleichung in kartesischen Koordinaten: $x^2 + y^2 = r^2$. Im allgemeineren Fall eines Kreises mit beliebigem Mittelpunkt $M (x_M \mid y_M)$ erhält man durch Verschiebung die allgemeine Kreisgleichung in Mittelpunktsform (Abb. 2):

¹⁰ Vgl. auch GOTTWALD, S. et al. (Hg.) 1986: Handbuch der Mathematik. Ein Ratgeber für Schule und Praxis, zum Selbststudium besonders geeignet. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut Leipzig, S. 453.

¹¹ Vgl. ebd.

¹² Vgl. KEMNITZ, ARNFRIED 2010: Mathematik zum Studienbeginn. Grundlagen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. 9., (überarbeitete und erweiterte) Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, S. 255.

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \quad (3.1) \quad ^{13}$$

3.2.2 Tangente und Normale

Es sei k ein Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius r . Ferner sei $P \in k$. Dann gilt für die Tangente t an k im Punkt P folgende Aussage:

$$t \cap k = \{P\} \wedge t \perp \overline{MP} \quad (3.2) \quad ^{14}$$

Gemeint ist, dass die Tangente den Kreis, entsprechend ihrer Definition, einzig im Punkt P schneidet. Außerdem sagt (3.2) aus, dass die Tangente an einen Kreis stets senkrecht auf dem sogenannten Berührungsradius steht (Abb. 2). Als Berührungsradius bezeichnet man die Verbindungsstrecke \overline{MP} mit $|\overline{MP}| = r$ zwischen dem Mittelpunkt des Kreises und dem Berührungspunkt der Tangente.¹⁵

Ausgehend von dieser Erkenntnis lassen sich auch Aussagen über die Normale eines Kreises treffen. Generell bezeichnet die Normale eine Gerade, welche eine Kurve in einem Punkt schneidet und senkrecht auf der Tangente an die Kurve in diesem Punkt steht.¹⁶ Es trifft sich, dass diese Kriterien

im Falle des Kreises von eben jener Geraden erfüllt werden, auf der der entsprechende Berührungsradius liegt.¹⁷ Aufgrund der Tatsache, dass der Berührungsradius definitionsgemäß stets den Mittelpunkt des Kreises beinhaltet, ist somit festzuhalten, dass sich alle Normalen eines Kreises in dessen Mittelpunkt schneiden. Gerade diese Eigenschaft von Kreisen wird sich im Weiteren als sehr nützlich erweisen.

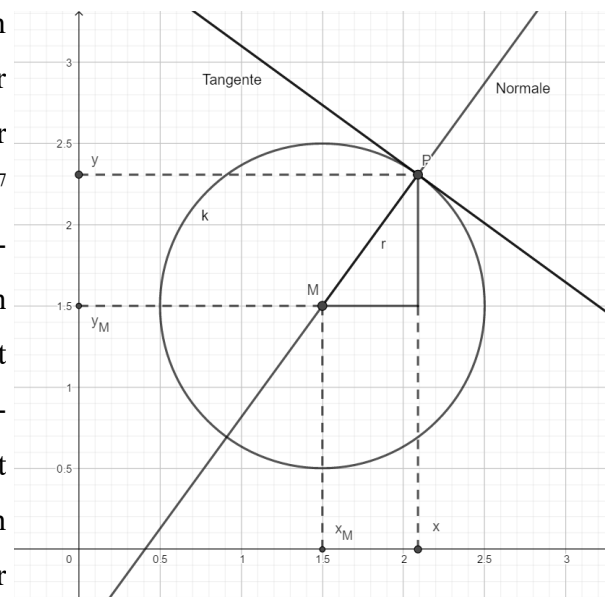


Abbildung 2: Tangentensatz und allgemeine Kreisgleichung

3.3 Quantitative Herleitung und Grenzwertbetrachtung

In Anlehnung an die Überlegungen aus Kapitel 3.1 soll nun ein allgemein anwendbares Verfahren entwickelt werden. Mit diesem Verfahren kann ein Kreis bestimmt werden, welcher sich vorerst in guter Näherung an den Graphen der Funktion $f(x)$ im hin-

¹³ Vgl. KEMNITZ 2010, S. 256.

¹⁴ Vgl. ZINK, THOMAS 2017: Elementare Geometrie. Vorlesung 5.

[<https://www.math.uni-bielefeld.de/~zink/Vorlesung5.pdf>, gefunden am 17.01.2021], S. 6.

¹⁵ Vgl. GOTTWALD (Hg.) 1986, S. 175.

¹⁶ Vgl. KEMNITZ 2010, S. 261.

¹⁷ Vgl. GOTTWALD (Hg.) 1986, S. 301.

reichend kleinen Intervall $[x_0 ; x_0 + h]$ anschmiegt. Ausgehend davon wird durch eine Grenzwertbetrachtung der Krümmungskreis in dem Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ ermittelt.

Wie in Gl. (3.1) ersichtlich, ist ein Kreis durch die Angabe seines Radius r und der Koordinaten $(x_M | y_M)$ seines Mittelpunktes eindeutig bestimmt. Der hier gewählte Ansatz zur Bestimmung dieser Parameter sieht vor, sich eine bestimmte Eigenschaft des Kreismittelpunktes zunutze zu machen: In ihm schneiden sich alle Normalen des Kreises. Nimmt man nun an, dass P ebenfalls ein Punkt auf der Peripherie des gesuchten Krümmungskreises ist, und dass besagter Kreis in diesem Punkt das identische Krümmungsverhalten wie der Graph von f zeigen soll, so lässt sich folgern, dass auch die Normale des Kreises und des Graphen von f in P übereinstimmen müssen. Gemäß den Erkenntnissen aus dem vorigen Kapitel impliziert dies, dass der Krümmungsmittelpunkt auf eben jener Geraden liegen muss. Um diesen jedoch eindeutig lokalisieren zu können, denke man sich einen weiteren Punkt $Q(x_0 + h | f(x_0 + h))$ auf dem Graphen von f in unmittelbarer Nähe zu P (Abb. 3). In dieser hinreichen kleinen Umgebung von P sind

die Peripherie des Krümmungskreises und der Graph von f lokal kaum mehr voneinander zu unterscheiden. Man darf deshalb in guter Näherung annehmen, dass die Normale des Graphen von f im Punkt Q beinahe einer Normale des Krümmungskreises entspricht. Sofern die Funktion $f(x)$ an den Stellen x_0 und $x_0 + h$ einfach differenzierbar ist, können die Gleichungen der beiden Normalen problemlos ermittelt werden.

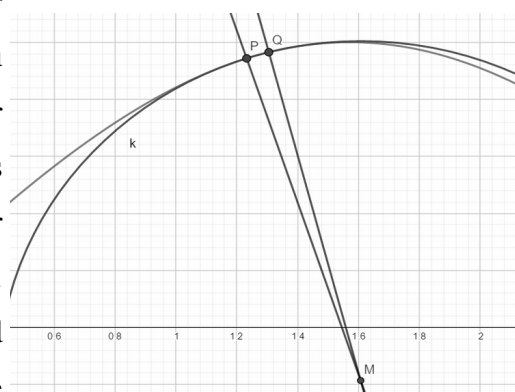


Abbildung 3: Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes

Eine Normale steht immer senkrecht auf der Tangente. Legt man für beide Geraden die Geradengleichung $g(x) = m \cdot x + b$ zugrunde, so besteht folgender Zusammenhang zwischen der Steigung der Tangente m_T und der Steigung der Normale m_N :¹⁸

$$\begin{aligned} m_T \cdot m_N &= -1 \\ \Leftrightarrow m_N &= -\frac{1}{m_T} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per definitionem entspricht die Tangentensteigung der ersten Ableitung einer Funktion an der entsprechenden Stelle. Mit diesen Informationen und der oben aufgeführten Geradengleichung erhält man für die Gleichung der Normale n der Funktion f an einer Stelle x_0 :

¹⁸ Vgl. GOTTWALD (Hg.) 1986, S. 450.

$$n_{x_0}(x) = m_N \cdot x + b$$

$$n_{x_0}(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x + b$$

Berücksichtigt man, dass die Normale in jedem Fall den Punkt $(x_0 | f(x_0))$ schneidet, kann der Wert für b errechnet werden.

$$n_{x_0}(x_0) = f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0 + b$$

$$\Leftrightarrow b = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0$$

$$\Rightarrow n_{x_0}(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot x + f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow n_{x_0}(x) = \frac{x_0 - x}{f'(x_0)} + f(x_0) \quad (3.4)$$

Mit Hilfe von Gl. (3.4) können die Normalen an den Stellen x_0 und $x_0 + h$ beschrieben, und auf Schnittpunkte hin untersucht werden. Vorausgesetzt es existiert genau ein Schnittpunkt, kann dieser als Mittelpunkt des gesuchten Kreises interpretiert werden (Abb. 3). Der Ansatz zur Schnittpunktbestimmung lautet:

$$n_{x_0}(x_M) = n_{x_0+h}(x_M)$$

$$\frac{x_0 - x_M}{f'(x_0)} + f(x_0) = \frac{x_0 + h - x_M}{f'(x_0 + h)} + f(x_0 + h)$$

Anschließend werden alle Terme auf die linke Seite des Gleichheitszeichens gebracht.

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 - x_M}{f'(x_0)} - \frac{x_0 + h - x_M}{f'(x_0 + h)} + f(x_0) - f(x_0 + h) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0 - x_M}{f'(x_0)} - \frac{x_0 - x_M}{f'(x_0 + h)} + f(x_0) - f(x_0 + h) - \frac{h}{f'(x_0 + h)} = 0$$

Ausklammern von $(x_0 - x_M)$ liefert:

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_M) \cdot \left[\frac{1}{f'(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0 + h)} \right] + f(x_0) - f(x_0 + h) - \frac{h}{f'(x_0 + h)} = 0$$

Die beiden Brüche in der eckigen Klammer werden auf einen gemeinsamen Nenner gebracht.

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_M) \cdot \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{f'(x_0) \cdot f'(x_0 + h)} + f(x_0) - f(x_0 + h) - \frac{h}{f'(x_0 + h)} = 0$$

Alle Terme werden durch den linken Bruch geteilt. Man erhält:

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_M) + \frac{\left[f(x_0) - f(x_0 + h) - \frac{h}{f'(x_0 + h)} \right] \cdot f'(x_0) \cdot f'(x_0 + h)}{f'(x_0 + h) - f'(x_0)} = 0$$

Der Bruch im Zähler wird gekürzt, der Faktor $f'(x_0)$ wird ausgeklammert.

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_M) + f'(x_0) \cdot \frac{[f(x_0) - f(x_0+h)] \cdot f'(x_0+h) - h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)} = 0$$

Aus dem Zähler des Bruches wird der Faktor -1 ausgeklammert.

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_M) - f'(x_0) \cdot \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)] \cdot f'(x_0+h) + h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)} = 0$$

Schlussendlich kann nach der gesuchten Variable x_M aufgelöst werden. Die resultierende Formel liefert die x-Koordinate des Mittelpunktes eines Kreises, welcher dem gesuchten Krümmungskreis an der Stelle x_0 beliebig nahe kommt.

$$\Leftrightarrow x_M = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)] \cdot f'(x_0+h) + h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)} \quad (3.5)$$

An dieser Stelle drängt sich nun auf, eine Grenzwertbetrachtung durchzuführen. Wählt man nämlich ein immer kleineres Intervall für die dargestellten Untersuchungen, so nähert sich x_M immer mehr der tatsächlichen x-Koordinate des Krümmungsmittelpunktes x_K an. In Gl. (3.5) erreicht man diese Annäherung dadurch, dass man h gegen 0 laufen lässt. Formal bildet man den Grenzwert: $\lim_{h \rightarrow 0} x_M = x_K$

Bevor die Grenzwertbetrachtung hier durchgeführt wird, soll Gl. (3.5) noch ein wenig vorbereitet werden. Man erweitere dazu den Ausdruck $[f(x_0+h) - f(x_0)]$ mit h .

$$x_M = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \cdot f'(x_0+h) + h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)}$$

Das h kann jetzt im Zähler ausgeklammert werden.

$$\Leftrightarrow x_M = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot f'(x_0+h) + 1 \right] \cdot h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)}$$

Der Grenzwert wird gebildet.

$$x_K = \lim_{h \rightarrow 0} x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot f'(x_0+h) + 1 \right] \cdot h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)}$$

Beim Bilden des Grenzwertes gibt es drei interessante Dinge zu berücksichtigen. Zunächst ist offensichtlich, dass der Faktor $f'(x_0+h)$ für $h \rightarrow 0$ gegen $f'(x_0)$ strebt. Der Grenzwert kann in diesem Fall leicht durch Substitution ermittelt werden.

Auffällig ist des Weiteren der Ausdruck $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. In Verbindung mit dem Limes erhält man hier gerade den Differentialquotienten: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Definitionsgemäß entspricht dieser Ausdruck dem Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0 .

Zuletzt fällt noch der Faktor $\frac{h}{f'(x_0+h) - f'(x_0)}$ mit seiner Ähnlichkeit zum Differentialquotienten ins Auge. Für $h \rightarrow 0$ konvergiert dieser Term gegen den reziproken Wert der zweiten Ableitung an der Stelle x_0 : $f''(x_0)^{-1}$.

Nimmt man diese Einzelbetrachtungen zusammen, ergibt sich als Grenzwert für die x-Koordinate des Krümmungsmittelpunktes:

$$x_K = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \quad (3.6)$$

Mit Gl. (3.6) kann auch die zweite Koordinate des Mittelpunktes errechnet werden. Man bedient sich dazu der Gleichung der Normale an der Stelle x_0 (Gl. 3.4):

$$\begin{aligned} y_K = n_{x_0}(x_K) &= f(x_0) + \frac{x_0 - x_K}{f'(x_0)} = f(x_0) + \frac{x_0 - x_0 + f'(x_0) \cdot \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)}}{f'(x_0)} \\ &\Leftrightarrow y_K = f(x_0) + \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Schlussendlich gilt es noch, den Krümmungsradius zu ermitteln. Als Grundlage dafür dient Gl. (3.1), die allgemeine Kreisgleichung. Für x_K und y_K werden jeweils die beiden Gleichungen (3.6) und (3.7) eingesetzt.

$$\begin{aligned} r_K^2 &= (x_0 - x_K)^2 + (f(x_0) - y_K)^2 \\ &= \left[x_0 - x_0 + f'(x_0) \cdot \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \right]^2 + \left[f(x_0) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \right]^2 \\ &= \left[f'(x_0) \cdot \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \right]^2 + \left[- \frac{f'(x_0)^2 + 1}{f''(x_0)} \right]^2 = \frac{f'(x_0)^2 \cdot (f'(x_0)^2 + 1)^2 + (f'(x_0)^2 + 1)^2}{f''(x_0)^2} \\ &= \frac{(f'(x_0)^2 + 1) \cdot (f'(x_0)^2 + 1)^2}{f''(x_0)^2} = \frac{(f'(x_0)^2 + 1)^3}{f''(x_0)^2} \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man dann den Radius des Krümmungskreises. Bezüglich des Vorzeichens gilt es noch zu beachten, dass der Radius eines Kreises niemals negativ sein kann. Von daher interessiert in diesem Zusammenhang nur die positive Lösung der Wurzel. Da $f''(x_0)$ je nach Krümmungsverhalten des Graphen ebenfalls negative Werte annehmen kann, wird der resultierende Ausdruck noch in eine Betragsfunktion eingebettet.

$$\Leftrightarrow r_K = \left| \frac{\sqrt{(f'(x_0)^2 + 1)^3}}{f''(x_0)} \right| \quad (3.8) \quad ^{19}$$

Man erkennt an den Gleichungen (3.6), (3.7) und (3.8), dass zur konkreten Bestimmung von Krümmungskreisen zwei Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Zum Einen muss die Funktion an der zu untersuchenden Stelle zweifach differenzierbar sein. Zum Anderen muss der Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle ungleich 0 sein. Die Folgerung daraus ist, dass Krümmungskreise sowohl für lineare Funktionen als auch an Wendestellen nicht definiert sind.

Es sei abschließend noch ein Wort über das Krümmungsverhalten von Funktionen gesagt. Nachdem man anhand der zweiten Ableitung einer Funktion aussagen kann, ob der zugehörige Graph links- oder rechtsgekrümmt ist, ist es nunmehr möglich, mit Hilfe der Krümmungskreise auch tatsächlich ein Maß für die Krümmung zu definieren. Man definiert die Krümmung k über $k = r_K^{-1}$, wobei r_K den Krümmungsradius bezeichnet.²⁰ Dies führt inhaltlich auf folgende Aussage: „Der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion f hat an der Stelle x_0 ein Krümmungsverhalten von

$$k = \frac{1}{R_K} = \frac{f''(x_0)}{(1 + [f'(x_0)]^2)^{1,5}} \quad \text{“ } ^{21}$$

4 Anwendung

Mit den gewonnenen Erkenntnissen können jetzt Aussagen über die Fliehkräfte an beliebigen Stellen in beliebig geformten Straßenkurven getroffen werden, sofern es möglich ist, diese durch eine zweifach differenzierbare Funktion zu modellieren. Die einzelnen Schritte zur Bestimmung einer Maximalgeschwindigkeit, mit welcher eine durch die Funktion $f(x)$ modellierte Kurve befahren werden kann, werden im Folgenden anhand des Beispiels der Bestener Straße durchexerziert.

Die genannte Kurve kann im Intervall $[-150 ; 150]$ durch die Funktion

$$f(x) = 6,96 \cdot 10^{-8} x^4 + 2,91 \cdot 10^{-6} x^3 - 4,54 \cdot 10^{-3} x^2 + 5,92 \cdot 10^{-2} x + 0,38 \quad ^{22}$$

beschrieben werden. Eine Längeneinheit entspricht dabei 1 Meter. Zunächst gilt es, den Scheitelpunkt der Kurve ausfindig zu machen. In der Modellfunktion fällt dieser mit dem lokalen Hochpunkt im genannten Intervall zusammen. Es lässt sich rechnerisch

¹⁹ Vgl. zur Herleitung PFEFFER, KARL-HEINZ 2010: Analysis für technische Oberschulen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch. 8., (überarbeitete und erweiterte) Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, S. 297-299.

²⁰ Vgl. ebd., S.269.

²¹ Ebd., S. 300.

²² Siehe Anhang.

ermitteln, dass ein lokales Maximum an der Stelle $x_0 = 6,57$ vorliegt. Mit Hilfe von Gl. (3.8) wird der Krümmungsradius an dieser Stelle berechnet.

$$r_K = \left| \frac{\sqrt{(f'(6,57)^2 + 1)^3}}{f''(6,57)} \right| = \left| \frac{\sqrt{(0^2 + 1)^3}}{-8,93 \cdot 10^{-3}} \right| = \left| \frac{1}{-8,93 \cdot 10^{-3}} \right| = 111,98 \approx 112$$

Im Falle gewöhnlicher Kraftfahrzeuge, wie bspw. bei Autos oder Motorrädern, werden die Zentripetalkräfte, die notwendig sind, um ein Fahrzeug dem Straßenverlauf in einer Kurve folgen zu lassen, von der Haftreibung zwischen Rädern und Straße aufgebracht. Die Haftreibungskraft hängt von der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ (Ortsfaktor $g = 9,81 \text{ m/s}^2$) auf das Fahrzeug und dem sogenannten Haftreibungskoeffizienten μ_0 ab.²³ Diese Zahl dient als Proportionalitätsfaktor und kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Es gilt dabei: Je größer der Haftreibungskoeffizient, desto besser ist die Haftung. Bei einer Fahrt auf trockenem Asphalt mit normaler Bereifung hat μ_0 durchschnittlich einen Wert von 0,9. Für nassen Asphalt sinkt er auf bis zu 0,6.²⁴

Die maximale mögliche Geschwindigkeit, mit der eine Kurve befahren werden kann, ist genau dann gegeben, wenn Zentripetalkraft (s. Gl. (2.1)) und Haftreibungskraft gleich groß sind. Der Ansatz hierfür lautet:

$$\begin{aligned} F_Z &= \mu_0 \cdot F_G \\ \Leftrightarrow m \cdot \frac{v^2}{r_K} &= \mu_0 \cdot m \cdot g \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{\mu_0 \cdot r_K \cdot g} \quad (4.1) \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass sich die Masse des Fahrzeugs aus der Gleichung herauskürzt und daher keinen Einfluss auf die gesuchte Grenzgeschwindigkeit hat. Eine Maximalgeschwindigkeit, die mit Hilfe von (4.1) berechnet wird, hat somit für jede Art von Fahrzeug die gleiche Gültigkeit.²⁵ Mit dem Radius des Krümmungskreises $r_K = 112\text{m}$ und einem Wert von 0,9 für μ_0 kann die höchstmögliche Geschwindigkeit bei guten Witterungsverhältnissen sowie guter Fahrbahn- und Reifenbeschaffenheit errechnet werden.

$$v = \sqrt{0,9 \cdot 112 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 113 \text{ km/h}$$

Analog erhält man bei nassem Asphalt:

$$v = \sqrt{0,6 \cdot 112 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 25,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 92,5 \text{ km/h}$$

23 Vgl. PHYSIKUNTERRICHT ONLINE (o. V.) Kurvenfahrten. [<https://physikunterricht-online.de/jahrgang-10/kurvenfahrten-zentripetalkraft/>], gefunden am 31.01.2021]

24 Vgl. KELLER, KATJA (Red.) 2018: Fahren Lernen. Das Begleitbuch zur Führerscheinausbildung. 17. Aufl. München: Verlag Heinrich Vogel, S. 274.

25 Abgesehen davon, dass der Wert von μ_0 auch von Reifenbeschaffenheit und Anpressdruck abhängt.

5 Fazit

Mit Blick auf die eingangs gestellte Fragestellung kann man nun festhalten, dass die Kurve in der Bestener Straße unter günstigen Bedingungen mit einer Geschwindigkeit von bis zu 113 km/h befahren werden kann, ohne dass das Fahrzeug von der Fahrbahn abkommt. Bei Nässe könnte es schon ab 92 km/h zu einem Ausbrechen aus der Kurve kommen. Es scheint daher gerechtfertigt, dass dort eine Geschwindigkeitsbeschränkung auf 70 km/h gilt. So ist man auch bei schlechtem Wetter noch weit von der kritischen Geschwindigkeit entfernt.

Betrachtet man diese Ergebnisse vor dem Hintergrund des Unfalls vom 23. Februar 2016, so lässt sich abschließend festhalten, dass die überhöhte Geschwindigkeit mit hoher Wahrscheinlichkeit die Ursache dafür war, dass das Auto von der Fahrbahn abkam. Angesichts der Tatsache, dass es erst wenige Tage zuvor viel Niederschlag gegeben hatte,²⁶ darf man annehmen, dass die Straßen zum Unfallzeitpunkt noch nass waren. Auch wenn nachträglich nicht mehr genau rekonstruiert werden kann, wie gut die Bodenhaftung des Autos im fraglichen Moment war, erscheint es auf Basis der vorhandenen Informationen wahrscheinlich, dass die dreistellige Geschwindigkeit des Fahrers über der kritischen Geschwindigkeit lag.

Wie an dem behandelten Beispiel deutlich wird, bieten die Krümmungskreise folglich eine präzise Methode, um konkrete Aussagen über Fliehkräfte in Straßenkurven treffen zu können. Falls es möglich ist, den Verlauf einer zu untersuchenden Kurve durch eine zweifach differenzierbare Funktion zu modellieren, so kann unter Berücksichtigung von Gleichung (3.8) der entsprechende Krümmungsradius an jeder Stelle ermittelt werden. In Verbindung mit der Formel für die Grenzgeschwindigkeit in Kurven (4.1), kann schließlich eine Aussage darüber getroffen werden, wie schnell eine Kurve höchstens befahren werden kann. Umgekehrt bieten Krümmungskreise auch die Möglichkeit, Streckenführungen so zu planen, dass ihre Krümmung kontrolliert anwächst. Anwendungsbeispiele hierfür wären Autobahnen oder Eisenbahnstrecken. Dank der Allgemeingültigkeit der erarbeiteten Formeln lassen sich diese also auf viele verschiedene Problemstellungen anwenden. Die Krümmungskreise sind somit ein wichtiges mathematisches Instrument bei der Planung von Streckenführungen sowie bei der Wahl von Geschwindigkeitsbeschränkungen.

26 Vgl. WETTER ONLINE (o. V.): Wetter im Rückblick. [https://www.wetteronline.de/wetter/daten/schermbeck?pcid=pc_rueckblick_data&gid=a4628&pid=p_rueckblick_dia_gram&sid=StationHistory&iid=10410&month=02&year=2016&period=4&metparaid=RR24, gefunden am 31.01.2021]

Anhang: Modellierung des Kurvenverlaufs

Für die gezeigten Untersuchungen ist es notwendig, den Verlauf der betrachteten Kurve in der Bestener Straße durch eine mathematische Funktion zu modellieren. Diese Funktion kann dann auf ihr Krümmungsverhalten und eine Maximalgeschwindigkeit hin untersucht werden.

Als Grundlage für die Modellierung dient eine Luftbildaufnahme der Gegend im Bereich der Kurve.²⁷ Über diese Abbildung wird ein kartesisches Koordinatensystem gelegt (Abb. 4). Die Position des Koordinatenursprungs ist im Prinzip beliebig wählbar, in dem dargestellten Fall wurde der Ursprung jedoch so gewählt, dass er in etwa mit dem Scheitelpunkt der Kurve zusammenfällt. Damit der Scheitelpunkt als lokales Extremum der modellierten Funktion gedeutet werden kann, müssen die Koordinatenachsen so orientiert sein, dass die Abszisse (x-Achse) parallel zu der Tangente im Scheitelpunkt verläuft. Die Ordinate (y-Achse) verläuft entsprechend senkrecht dazu. Die Skalierung der Achsen erfolgt entsprechend dem Maßstab der Aufnahme.



Abbildung 4: Verortung von Punkten im Straßenverlauf

Nach Erstellen des Koordinatensystems werden einige ausgewählte Punkte des Straßenverlaufs im Bereich der Kurve markiert und durch Angabe von Koordinaten verortet. Diese Punkte werden anschließend in ein „Lists & Spreadsheet“-Dokument des Graphischen Taschenrechners²⁸ (GTR) eingetragen und dienen als Datengrundlage für die Regressionsanalyse. Bei der Regressionsanalyse wird nach einem funktionalen Zusammenhang zwischen den beiden Koordinaten der Punkte gesucht. Der GTR bietet hierfür im Menü für statistische Analyseverfahren mehrere Möglichkeiten an. Man versucht durch Ausprobieren, ein Regressionsverfahren zu finden, welches eine Funktion liefert, mit der der Straßenverlauf möglichst gut möglich approximiert wird.

27 Quelle: Google Maps Satellitenbilder. [<https://www.google.de/maps/@51.6529666,6.8924919,660m/data=!3m1!1e3>, gefunden am 19.02.2021]

28 Die Anleitungen beziehen sich auf das Modell TI-Nspire™ CX von Texas Instruments.

Eine Kenngröße, um die Güte der Approximation zu quantifizieren, liefert der Korrelationskoeffizient (oft als R^2 abgekürzt). Je näher dieser Wert bei 1 liegt, desto genauer nähert die generierte Funktion die Datengrundlage an. In dem betrachteten Beispiel erhält man den höchsten Korrelationskoeffizienten mit $R^2 = 0.9989$ bei einer Regression vierter Ordnung. Die dabei vom Taschenrechner generierte Funktion $f(x)$ entspricht der gesuchten Modellfunktion. Der Kurvenverlauf in der Bestener Straße wird dadurch recht akkurat modelliert. In Abbildung 5 ist der Graph der Funktion dargestellt. Die Funktionsvorschrift lautet:

$$f(x) = 6,96 \cdot 10^{-8} x^4 + 2,91 \cdot 10^{-6} x^3 - 4,54 \cdot 10^{-3} x^2 + 5,92 \cdot 10^{-2} x + 0,38$$

Es ist zum Schluss noch wichtig, zu erwähnen, dass die dargestellte Funktion nur in dem Intervall $[-150 ; 150]$ zur Beschreibung des Kurvenverlaufs geeignet ist. Außerhalb dieses Intervalls liegen der Funktion keine Messdaten zugrunde.

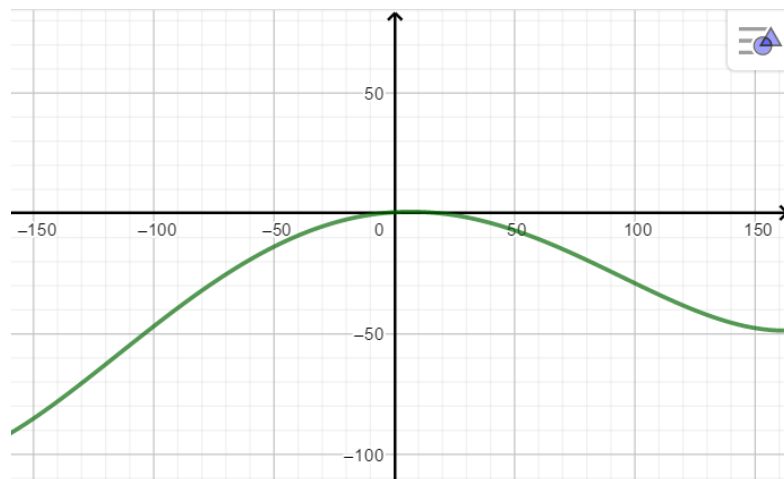


Abbildung 5: Graph der Funktion $f(x)$

Literaturverzeichnis

- BERGMANN, MARTIN et al. (Red.) 2007: Schülerduden Physik. Das Fachlexikon von A-Z. 6., neu bearb. Aufl. Mannheim: Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG.
- DORSTENER ZEITUNG (o. V.) 24.02.2016: 29-Jähriger bei Unfall im Auto eingeklemmt. In: Dorstener Zeitung [<https://www.dorstenerzeitung.de/schermbeck/29-jaehriger-bei-unfall-im-auto-eingeklemmt-161281.html>], gefunden am 06.12.2020]
- GASSNER, JOSEF M. und MÜLLER, JÖRN 2019: Können wir die Welt verstehen? Meilensteine der Physik von Aristoteles zur Stringtheorie. Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag GmbH.
- GOTTWALD, S. et al. (Hg.) 1986: Handbuch der Mathematik. Ein Ratgeber für Schule und Praxis, zum Selbststudium besonders geeignet. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut Leipzig.
- KELLER, KATJA (Red.) 2018: Fahren Lernen. Das Begleitbuch zur Führerscheinausbildung. 17. Aufl. München: Verlag Heinrich Vogel.
- KEMNITZ, ARNFRIED 2010: Mathematik zum Studienbeginn. Grundlagen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. 9., (überarbeitete und erweiterte) Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.
- PFEFFER, KARL-HEINZ 2010: Analysis für technische Oberschulen. Ein Lehr- und Arbeitsbuch. 8., (überarbeitete und erweiterte) Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag.
- PHYSIKUNTERRICHT ONLINE (o. V.): Kurvenfahrten. [<https://physikunterricht-online.de/jahrgang-10/kurvenfahrten-zentripetalkraft/>], gefunden am 05.12.2020]
- RUHRLÄNDER, MICHAEL 2014: Aufstieg zu den Einsteingleichungen. Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin: Pro BUSINESS.
- WETTER ONLINE (o. V.): Wetter im Rückblick. [https://www.wetteronline.de/wetterdaten/schermbeck?pcid=pc_rueckblick_data&gid=a4628&pid=p_rueckblick_diagram&sid=StationHistory&iid=10410&month=02&year=2016&period=4&metpa raid=RR24], gefunden am 31.01.2021]
- ZINK, THOMAS 2017: Elementare Geometrie. Vorlesung 5. [<https://www.math.uni-bielefeld.de/~zink/Vorlesung5.pdf>], gefunden am 17.01.2021]

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich diese Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen sind als solche gekennzeichnet.

Gahlen, den 22.02.2021

Ort, Datum

S. Hilbricht

Unterschrift