Vorwissenschaftliche Arbeit

# Die Mathematik der Musik

Lise Ingrid Hemery

8C

BG/BRG Carnerigasse

Carnerigasse 30-32

8010 Graz

Schuljahr 2023/24

Abgabedatum: 1. März 2024

Betreuer: Mag. Dieter Glaser

# Abstract

Die vorliegende vorwissenschaftliche Arbeit befasst sich mit den Zusammenhängen der beiden Fachgebiete Mathematik und Musik. Das Ziel ist es hierbei, herauszufinden, inwiefern die Mathematik in der Entwicklungsgeschichte der Musik eine Rolle gespielt hat und in welchem Maße sie auch heute in der Musiktheorie relevant ist. Ferner soll die Frage beantwortet werden, inwiefern Musiker, insbesondere Komponisten, selbst Mathematik in ihre Arbeit einflechten.

Im Zuge dessen wird zu Beginn die Zusammensetzung und die mathematische Darstellung eines Tones analysiert sowie die Harmonielehre näher erforscht und mathematisch begründet. An dieser Stelle wurde auch ein Experiment zum besseren Verständnis des physikalischen Phänomens der Schwebung durchgeführt. In weiterer Folge wird ein Einblick in die Entstehung und Evolution verschiedener Stimmungen und Temperierungen gegeben und zu guter Letzt die direkte Anwendung der Mathematik in musikalischen Kompositionen untersucht.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Mathematik eine essenzielle Rolle in der Musik, speziell in der Musiktheorie, spielt und sich demnach auch die bedeutendsten Mathematiker mit diesem Thema auseinandergesetzt haben.

## Vorwort

Den Bezug zur Musik habe ich schon von klein an, da ich mit sechs Jahren anfing Klavierunterricht zu nehmen und mittlerweile zusätzlich Geige spiele. Später hat sich in mir auch das Interesse für die Mathematik geweckt, aber nie wäre ich auf die Idee gekommen, diese beiden Interessen zu verbinden, wäre ich nicht zu Hause auf ein Buch gestoßen, das eben dies tat. Nach einigen Recherchen wurde mir klar, wie viele Verknüpfungen es zwischen der Mathematik und der Musik gibt und da das Thema wie maßgeschneidert für mich schien, beschloss ich, mich ihm Rahmen der vorwissenschaftlichen Arbeit näher damit auseinanderzusetzen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Herr Professor Dieter Glaser für seine hilfreichen Anregungen und seine Unterstützung beim Verfassen dieser Arbeit bedanken. Ein weiterer Dank gebührt auch meinen Eltern, die mich stets in meinen Interessen unterstützt und mir den Weg zur Musik ermöglicht haben.

Lise Hemery

Graz, 20.02.2024

# Inhalt

# 1. Einleitung

*„Musik ist die versteckte arithmetische Tätigkeit der Seele, die sich nicht dessen bewusst ist, dass sie rechnet.“*

- Gottfried Wilhelm von Leibniz

Wer an Musik denkt, denkt meist an Kunst, Klänge und Gefühlsaudruck, vielleicht auch an Harmonie, aber nur wenige würden die Musik mit der Mathematik in Verbindung bringen. Tatsächlich beruht jedoch ein großer Teil der Musik auf mathematischen Konstrukten. Die Freiheit, die Komponisten heute durch die sogenannte gleichstufige Stimmung erleben, haben sie beispielsweise reiner Mathematik zu verdanken. Auch ob und warum zwei Töne gemeinsam harmonieren, also schön klingen, kann mathematisch begründet werden. Einige Musiktheoretiker haben es sogar so weit getrieben, gänzlich mathematische Kompositionsmethoden zu erfinden.

Dass viel Mathematik in der Musik steckt, ist allerdings keine neue Erkenntnis. Schon seit mehreren Jahrhunderten setzen sich unter anderem auch berühmte Mathematiker wie Pythagoras von Samos oder Leonhard Euler mit diesem Thema auseinander. Aber funktioniert Musik wirklich nicht ohne Mathematik und sind Musiker nun automatisch Mathematiker? Diese Fragestellung soll im Rahmen meiner Arbeit beantwortet werden. Dafür werde ich mich auf drei Themenbereiche konzentrieren: die Harmonie in der Musik, die Entwicklung musikalischer Tonsysteme und die Komposition. Antworten auf die Fragestellung soll einerseits die wissenschaftliche Literatur geben. Andererseits wird auch ein Experiment im Rahmen der Erforschung der Harmonie relevant sein. Ein wichtiges Werkzeug ist hierfür das Programm GeoGebra.

Zu erwähnen bleibt noch, dass es weitaus mehr Bereiche gibt, in denen die Musik mathematisch begründet werden kann. Das Ziel dieser Arbeit ist es jedoch nicht, die gesamte Musik in Zahlen darzustellen, sondern ein Gefühl dafür zu bekommen, inwiefern die Mathematik für diesen Kunstbereich wirklich essenziell ist.

# 2. Schwingungen und Harmonie

## 2.1 Einführung

Beim Musizieren geht es vor allem darum, Wohlklang zu erzeugen, indem Töne kombiniert werden, die gemeinsam schön klingen. Um aber zu verstehen, wann und wie eine solche Harmonie zustande kommt, ist es essenziell, die Grundlagen eines Tones, nämlich Schallwellen, zu erforschen. Dafür ist ein physikalischer Ausflug in die Akustik und ein weiterer in die Trigonometrie notwendig.

## 2.2. Die Schallwelle

### 2.2.1 Entstehung und Wahrnehmung einer Schallwelle

Wenn ein Gegenstand vibriert, regt es die Moleküle in seiner Umgebung an, deren gemeinsame Bewegung eine Welle von erhöhtem und erniedrigtem Luftdruck erzeugt. Diese Oszillationen aus Druckzuständen werden als Schallwelle bezeichnet.[1]

Wenn die Schallwelle unser Ohr erreicht, so fängt auch unser Trommelfell an zu schwingen und überträgt diese Schwingungen über unsere drei Gehörknöchelchen an unser Innenohr, in welchem sich Flüssigkeit und Haarsinneszellen befinden, welche zu guter Letzt Nervensignale an unser Gehirn weiterleiten. Dieses kann die Schallwelle, die meist aus der Überlagerung vieler verschiedener Wellen besteht, problemlos zerlegen und somit das Geräusch, den Ton oder den Klang identifizieren.[2]

### 2.2.2. Mathematische Darstellung einer Schallwelle als Sinusfunktion

Da Schallwellen also Oszillationen aus Luftdruckzuständen sind, können wir sie auch anhand einer Zeit-Druck-Funktion darstellen. Nun ist es tatsächlich so, dass die meisten schwingenden Objekte alle auf ähnliche Art und Weise oszillieren und dass diese Oszillationen alle mathematisch mit einer oder mehreren Sinuswellen beschrieben werden können.[3]

---

[1] Vgl. Benson, David J.: Music. A Mathematical Offering. 6. Auflage2013. Cambridge, Vereinigtes Königreich: Cambridge University Press 2007, S. 5 f.
[2] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. Exploring the Connections. 1. Auflage. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press 2016, S. 82 f.
[3] Vgl. ebda, S. 88 f.

Ob die Oszillation aus einer oder mehreren Sinuswellen besteht, hängt davon ab, ob es sich bei der Schallwelle um einen reinen Ton oder um einen Klang handelt. Ein reiner Ton wird beispielsweise von einer Stimmgabel erzeugt und kann mit einer einzigen kontinuierlichen Sinuswelle modelliert werden. Er wird daher oft auch als Sinuston bezeichnet und kann mit folgender Funktionsformel dargestellt werden:[4]

$$x(t) = A(t) \cdot sin(\omega t + \alpha)$$

$t$ ... Zeit
$\omega = 2\pi f$ ... Kreis- oder Winkelfrequenz
$f = \frac{\omega}{2\pi}$ ... Frequenz (Schwingungen pro Sekunde)
$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ ... Dauer einer einzigen Schwingung
$\alpha$ ... (Null-)Phasenwinkel, Phasendifferenz
$t_0 = -\frac{\alpha}{\omega}$ ... Phasenverschiebung:
$(\omega t + \alpha) = \omega(t - t_0)$
$A, A(t)$ ... Amplitude (konstant oder zeitabhängig)

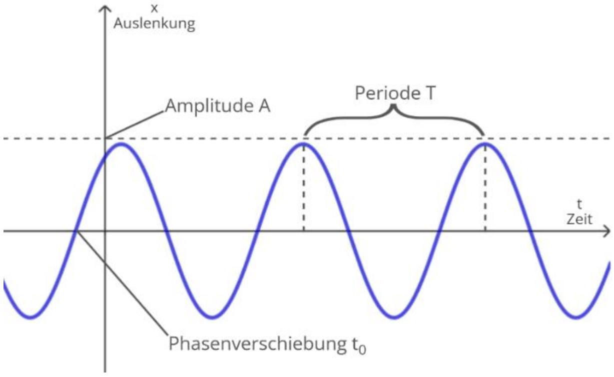


*Abbildung 1: Eine Sinusfunktion mit konstanter Amplitude*

Der Ton, der von einer Stimmgabel erzeugt wird ($f = 440$ Hz), hätte folgende Funktionsformel:

$$x(t) = A(t) \cdot sin(880\pi \cdot t + \alpha)$$

Wenn wir davon ausgehen, dass die Amplitude konstant bleibt und die Phasenverschiebung $\alpha$ gleich null ist, dann sieht unser Ton wie folgt aus:

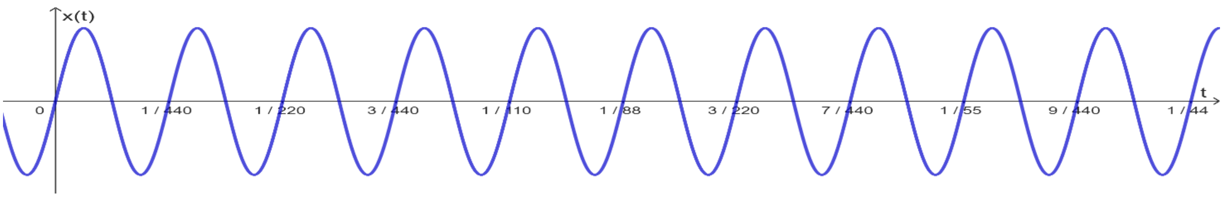


*Abbildung 2: Sinusfunktion eines reinen Tons mit konstanter Amplitude und Frequenz f=440Hz*

Während Mathematiker hier von einer *Sinusfunktion* oder *Sinuswelle* sprechen, so ist unter Physikern meist von einer *harmonischen Schwingung* die Rede und Musiker bezeichnen dies einfach als *reinen Ton.*[5]

[4] Vgl. Schüffler, Karlheinz: Die Tonleiter und ihre Mathematik. Mathematische Theorie musikalischer Intervalle und historischer Skalen. 3. Auflage. Willich, Nordrhein-Westfalen, Deutschland: Springer Spektrum 2022, S. 7 f.
[5] Vgl. Maor, Eli: Music by the Numbers. From Pythagoras to Schoenberg. 1. Auflage. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 2018, S. 56.

### 2.2.3. Die Attribute eines Tons

#### *2.2.3.1. Lautstärke*

Verschiedene Töne unterscheiden sich unter anderem in ihrer Lautstärke. Wenn wir einen Ton wieder als Sinusfunktion betrachten, lässt sich diese anhand der Amplitude der Sinuswelle herauslesen. Dabei gilt: Je größer die Amplitude, desto lauter der Ton.

In der Physik spricht man von der Intensität eines Tons. Sie wird auf einer logarithmischen Skala berechnet und ihr wird die Einheit Dezibel (dB = 0,1 Bel) zugeschrieben. Hierbei ist es wichtig anzumerken, dass ein Dezibel im Gegensatz zu einer Sekunde oder einem Meter eine dimensionslose Größe ist. Dezibel werden mithilfe eines Referenzwertes $I_0$ berechnet, der meist der Schwelle des menschlichen Gehörs entspricht ($I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \omega atts\ /\ m^2$). Die Formel zur Berechnung der Intensität eines Tones oder Klanges lautet: [6]

$$dB = 10\, log \left(\frac{I}{I_0}\right)$$

#### *2.2.3. Tonhöhe*

Die Höhe eines Tons ist durch seine Frequenz gegeben. Letztere entspricht der Anzahl an Schwingungen, pro Sekunde. Dabei entsprechen höhere Frequenzen größeren Wellengeschwindigkeiten und somit höheren Tönen. Die Einheit der Frequenz ist das Hertz (Hz). 1 Hz entspricht einer Welle, die in einer Sekunde genau eine Schwingung durchführt. Die Formel zur Berechnung der Frequenz lautet

$$f = \frac{1}{T} \quad ,$$

wobei T der Periodendauer, also der Zeit, die ein Welle braucht, um eine Schwingung durchzuführen, entspricht. Eine wichtige Frequenz in der Musik ist beispielsweise 440 Hz. Diese Frequenz entspricht dem Kammerton a ', nach welchem sich alle Instrumente in einem Orchester für die Stimmung ihrer Instrumente richten. Das menschliche Gehör kann grundsätzlich Töne mit einer Frequenz im Bereich von 20 – 20.000 Hz wahrnehmen.[7]

---

[6] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 84 f.
[7] Vgl. ebda, S. 86 f.

### 2.3. Natürliche Töne

#### 2.3.1. Obertöne

Der von einer Stimmgabel erzeugte Ton wurde oben als reiner Ton bezeichnet, doch dies ist nicht ganz richtig. Einen wirklich reinen Sinuston gibt es in der Natur tatsächlich nicht, es handelt sich hierbei eher um ein mathematisches Konstrukt. In der Musik kommen in Wahrheit nur Überlagerungen mehrerer Sinuswellen vor. Wenn wir beispielsweise eine Klaviertaste drücken, so wird nicht ein einziger reiner Ton erzeugt, sondern eine Überlagerung vieler reiner Töne, also eigentlich ein Klang, den man aber auch als natürlichen Ton bezeichnen kann. In der Musik sprechen wir also oft von Tönen, wenn in Wahrheit von Klängen die Rede ist.[8]

Tatsächlich entstehen bei jeder Schwingung oberhalb der Grundfrequenz weitere, schnellere Schwingungen. Dies ist nicht nur bei Schalwellen der Fall, sondern es handelt sich hierbei um ein universelles Verhalten der Natur. Wenn also eine Gitarrensaite schwingt, dann schwingt sie nicht nur in ihrer gesamten Länge mit Grundfrequenz, sondern auch über ihre halbe Länge, Drittellänge, Viertellänge und so weiter. Zusätzlich zu ihrer Grundfrequenz entstehen daher Schwingungen mit doppelter, dreifacher, vierfacher Grundfrequenz etc. Die Grundschwingung wird als Grundton bezeichnet und ihre Vielfache als Obertöne. Die Obertöne und auch der Grundton bilden gemeinsam die Partialtöne eines natürlichen Tons.[9]

Interessanterweise haben diese vielen Obertöne aber keinen Einfluss auf die Frequenz, die wir hören. Wenn wir beispielsweise einen reinen Ton mit einer Frequenz von 200 Hz und einen reinen Ton mit einer Frequenz von 400 Hz gleichzeitig erzeugen würden und diese beiden Töne dieselbe Amplitude hätten, so würde unser Ohr eine Frequenz von 200 Hz wahrnehmen.h Der Ton mit der Frequenz von 200 Hz wäre nämlich unser Grundton und der andere Ton unser Oberton. Würden wir auf ähnliche Art und Weise reine Töne mit den Frequenzen 600, 800 und 1000 Hz spielen, so würde unser Gehirn dem Klang ebenfalls eine Frequenz von 200 Hz zuordnen, weil dies immer noch die Grundfrequenz des Klanges wäre. [10]

---

[8] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. Rhythmus, Resonanz und Harmonie. deutschsprachige Auflage. Kerkedriel, Niederlande: Librero 2017, S. 107.
[9] Vgl. Saus, Wolfgang: Die Obertonreihe: URL: Die Obertonreihe - Aufbau, Anwendung und Hintergründe [Stand: 15.10.2023].
[10] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 97 f.

Es wird deutlich, dass die Grundfrequenz eines realen Tones immer dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) der Partialtöne entspricht. Wenn wir beispielsweise Teiltöne mit den Frequenzen 200, 250, 300, 350, 400 und 500 Hz hätten, so würde die Grundfrequenz 50 Hz betragen, da

$$ggT(200;250;300;350;400;500) = 50.$$

### 2.3.2. Die harmonische Obertonreihe

In der Praxis bedeutet das Ganze, dass jedes Mal, wenn ein natürlicher Ton erklingt, unendlich viele Obertöne mitschwingen. Diese ganzen Obertöne bilden die sogenannte harmonische Obertonreihe. Dabei hat jeder Ton seine eigene Obertonreihe, die Abstände zwischen den einzelnen Obertönen und dem Grundton sind aber für alle Töne gleich.

Der erste Oberton entsteht dadurch, dass die schwingende Saite, wie zuvor erwähnt, auch in ihrer halben Länge schwingt. Die Frequenz des ersten Obertones ist somit doppelt so groß, wie die des Grundtones, wodurch der erste Oberton genau eine Oktave über dem Grundton liegt. Der zweite Oberton entsteht, weil die Saite auch in ihrer Drittellänge schwingt und liegt durch die Verdreifachung der Grundfrequenz genau eine Quint über dem ersten Oberton. (Dass durch die Verdoppelung oder Verdreifachung der Grundfrequenz das Intervall einer Oktave, beziehungsweise einer Quint entsteht, möge an dieser Stelle einfach so hingenommen werden, da dies erst im nächsten Kapitel genau begründet wird). Auf ähnliche Art und Weise entstehen auch die weiteren Obertöne. Der dritte Oberton liegt immer eine Quart über dem zweiten, der vierte eine große Terz über dem dritten und der fünfte eine kleine Terz über dem vierten Oberton.

Wenn unser Grundton das große C wäre, so wäre die Abfolge vom ersten bis zum fünften Oberton daher die folgende: kleines c, kleines g, c ´, e´, g´. Ab dem sechsten Oberton könnte man nicht mehr alle Obertöne in einem Notensystem darstellen, da diese Töne nicht in unserem Tonsystem enthalten sind. Der sechste Oberton entspräche beispielsweise einem Ton zwischen a´ und b´.[11]

---

[11] Vgl. Gorski, Markus: Die Obertonreihe. URL: Die Obertonreihe (lehrklaenge.de) [Stand: 01.10.2023].

In der folgenden Abbildung ist die harmonische Obertonreihe des großen C bis zum 15. Oberton dargestellt. Noten, unter denen ein Pfeil zu sehen ist, kennzeichnen Töne in der Obertonreihe, die etwas tiefer sind als die entsprechenden Töne im Notensystem. [12]

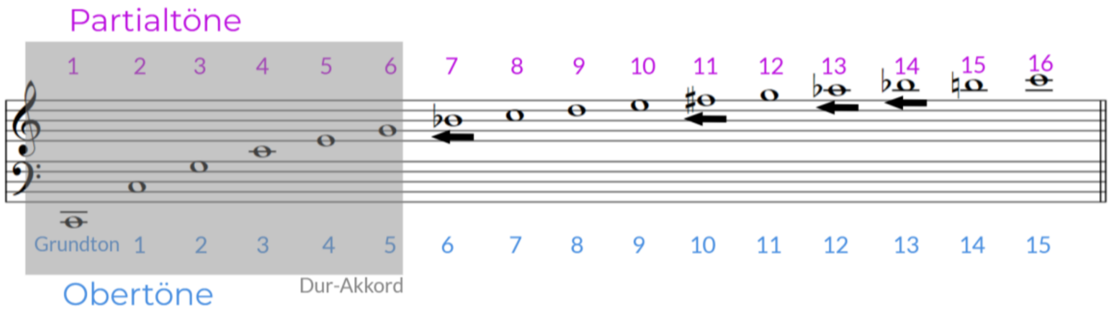


*Abbildung 3: Die ersten 15 Obertöne des großen C (≈65 Hz)*

### 2.3.3. Die Fourier-Analysis

In der Mathematik ist die Periode T einer periodischen Funktion g folgend definiert:

$$g(x+T) = g(x) \text{ für alle } x \text{ im Definitionsbereich}$$

Für eine Sinusfunktion $X_1(t) = a_1 \cdot sin(\omega t)$ ist die kleinste Periode T gegeben durch:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Da die Funktion $X_1(t)$ die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und die kleinste Periode $T$ hat, besitzt die Funktion $X_2(t) = a_2 \cdot sin(2\omega t)$ eine Frequenz von $2f$ und die kleinste Periode $T/2$, die Funktion $X_3(t) = a_3 \cdot sin(3\omega t)$ eine Frequenz von $3f$ und die kleinste Periode $T/3$ und so weiter. Eine Funktion $X_n(t) = a_n \cdot sin(n\omega t)$ hat also eine Frequenz von $nf$ und die kleinste Periode $T/n$. Die Funktionen $X_1$, $X_2$, $X_3$ bis $X_n$ besitzen alle als Frequenz ein Vielfaches von $f$ und haben somit alle $T$ als Periode, wobei $T$ nur für die Funktion $X_1$ die kleinste Periode ist. Wenn wir aber die Funktionen $X_1$, $X_2$, $X_3$ bis $X_n$ addieren, so hat auch ihre Summe

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot sin(n\omega t)$$

die kleinste Periode $T$.[13]

---

[12] Vgl. Gorski, Markus: Die Obertonreihe. URL: Die Obertonreihe (lehrklaenge.de) [Stand: 01.10.2023].

[13] Vgl. Maor, Eli: Music by the Numbers. S. 61 f.

Je nachdem, welche Werte wir für $a_1$, $a_2$, $a_3$ und $a_n$ einsetzen, können mit dieser Formel unendlich viele Töne kreiert werden, die alle ein bestimmtes Wellenbild besitzen.[14]

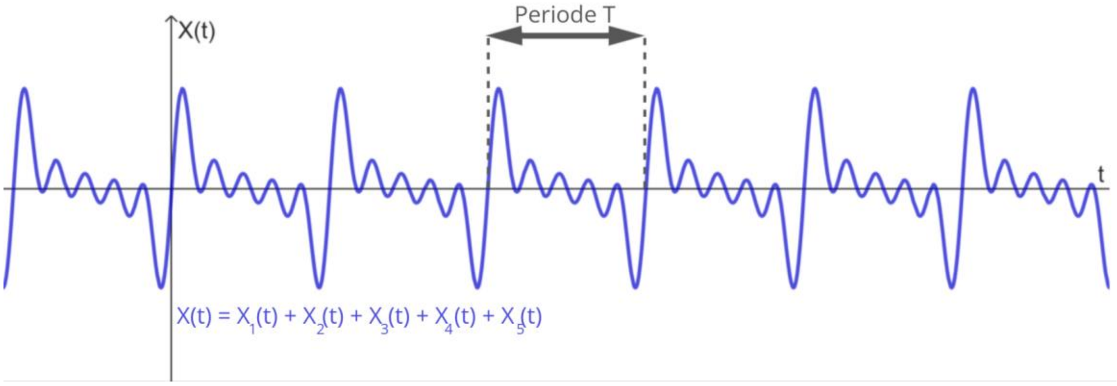


*Abbildung 4: $X(t)=X_1(t)+ X_2(t)+ X_3(t)+ X_4(t)+ X_5(t)$*

Der französische Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) zeigte, dass diese Aussage auch genau andersherum funktioniert. Er bewies, dass jede periodische Funktion mit Periode $T$ als Summe einer unendlichen Anzahl an Sinus- und Kosinusfunktionen mit den kleinsten Perioden $T$, $T/2$, $T/3$ bis $T/n$ dargestellt werden kann. Eine solche Summe wird als Fourier-Reihe bezeichnet und kann folgendermaßen angeschrieben werden:

$$f(x) = a_0 \,/\, 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cdot cos(n\omega x) + b_n \cdot sin(n\omega x))$$

In der Musiktheorie wird die Formel vereinfacht geschrieben:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot sin(n\omega t)$$

Mithilfe der Fourier-Analyse lässt sich also jede periodische Schwingung und jeder Ton in eine Summe von Sinusfunktionen, also in seine Partialtöne, zerlegen. Dabei sieht die Zerlegung jedes Tones anders aus, denn alle Töne besitzen eine einzigartige Obertonreihe. Man kann also sagen, dass die harmonische Obertonreihe in der Musiktheorie eine ähnliche Rolle spielt, wie die Primfaktorzerlegung in der Mathematik.[15]

[14] Vgl. Maor, Eli: Music by the Numbers. S. 61 f.
[15] Vgl. ebda, S. 61 f.

### 2.3.4. Obertonspektrum und Klangfarbe

Die Obertöne sind auch dafür verantwortlich, dass verschiedene Instrumente unterschiedlich klingen, denn sie sind für die Klangfarbe zuständig.

Das liegt daran, dass die Obertöne einer bestimmten Note zwar auf jedem Instrument dieselben sind, ihre Amplituden jedoch variieren. Die Teiltöne und deren Lautstärkenverhältnisse untereinander werden als Obertonspektrum bezeichnet. Wenn also ein und derselbe Ton auf einem Klavier und anschließend auf einer Geige gespielt wird, so besitzt dieser Ton auf beiden Instrumenten genau dieselbe Obertonreihe, jedoch ein unterschiedliches Obertonspektrum und aus diesem Grund eine unterschiedliche Klangfarbe.[16]

Hier wird deutlich, dass unser Gehör unseren Augen weit überlegen ist, denn unsere Augen können nur eine Wellenlänge oder Farbe auf einmal wahrnehmen. Wenn beispielsweise die Farben gelb und blau gemischt werden, so sehen wir nur grün. Unser Gehör hingegen kann verschiedene Frequenzen gleichzeitig wahrnehmen und als verschiedene Töne interpretieren. Es kann einen einzelnen Ton in seine einzelnen Partialtöne zerlegen und sein Obertonspektrum analysieren. Wenn dies nicht der Fall wäre, so könnten wir keine verschiedenen Klangfarben voneinander unterscheiden und alle Instrumente würden sich somit gleich anhören. Auf der folgenden Seite werden die Obertonspektren eines Klaviers, einer Geige und einer Oboe verglichen.[17]

[16] Vgl. Gorski, Markus: Das Obertonspektrum. URL: Das Obertonspektrum (der Formant) (lehrklaenge.de) [Stand: 04.11.2023].
[17] Vgl. Maor, Eli: Music by the Numbers. S. 56 f.

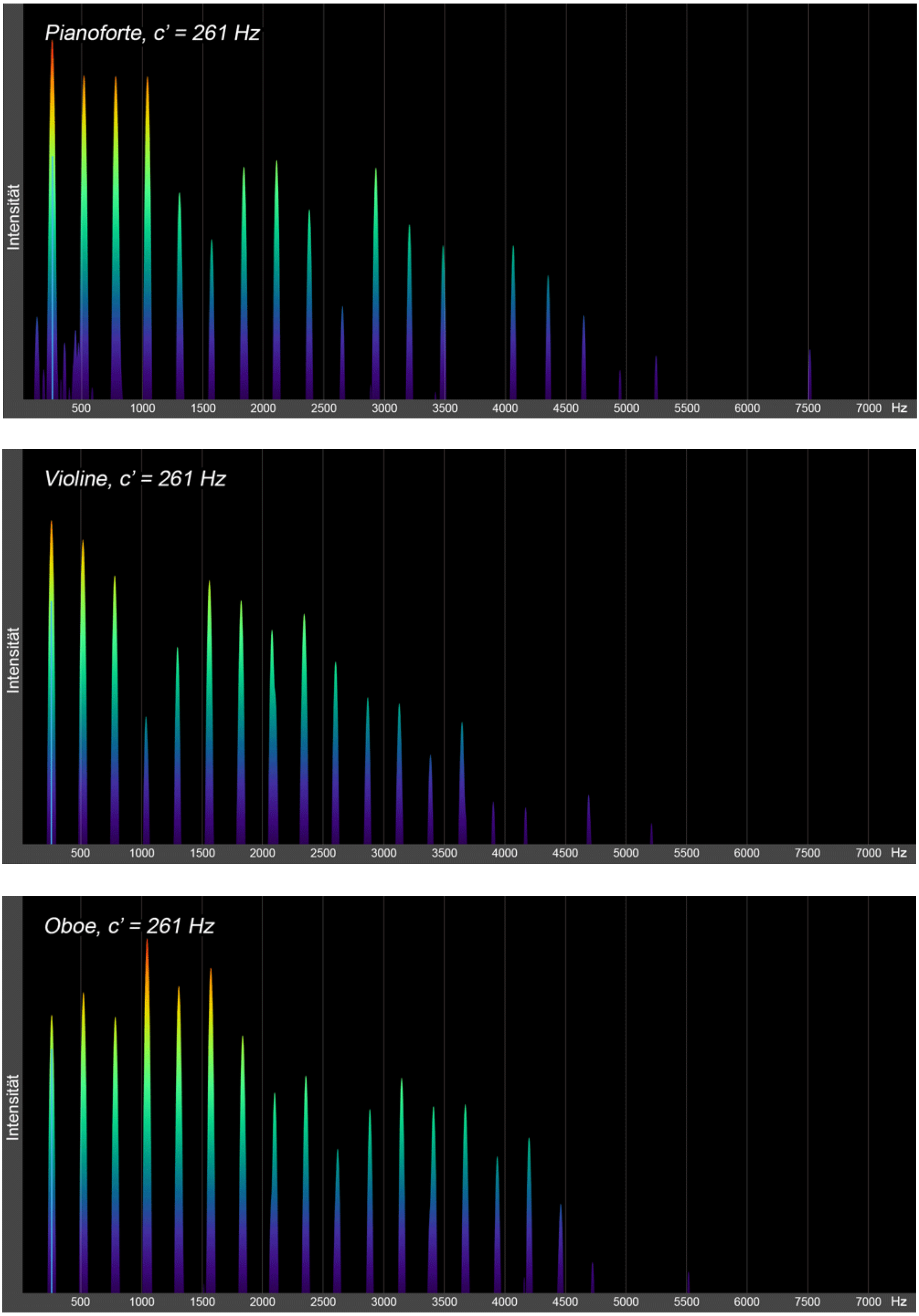


*Abbildung 5: Obertonspektren-Vergleich dreier Instrumente*[18]

[18] Gorski, Markus: Das Obertonspektrum. URL: Das Obertonspektrum (der Formant) (lehrklaenge.de) [Stand: 04.11.2023].

## 2.4 Harmonie

### 2.4.1. Konsonanz und Dissonanz

Wenn zwei oder mehr Töne gemeinsam schön klingen, dann spricht man in der Musik von Konsonanz. Wird diese Tonkombination als unangenehm empfunden, spricht man von Dissonanz. Ob wir einen Klang nun als konsonant oder dissonant empfinden, ist sehr subjektiv. Einerseits kann man lernen, bestimmte Klänge zu mögen und ob wir einen Akkord als konsonant empfinden oder nicht, hängt meist von unserer musikalischen Kultur ab. Andererseits scheint es Intervalle wie die Terz, Quarte, Quinte oder Oktave zu geben, die kultur- und geschmacksunabhängig von allen Menschen als konsonant empfunden werden, während beispielsweise die Sekunde stets als dissonant gilt.

Schon im 6. Jhdt. v. Chr. stellte Pythagoras von Samos fest, dass Töne, deren Frequenzen in einem einfachen Verhältnis zueinanderstehen, gemeinsam konsonant klingen. Bei einer Oktave beispielsweise stehen die Frequenzen beider Töne im Verhältnis 2:1, bei einer Quinte im Verhältnis 3:2.[19]

In der Antike versuchte man also die Konsonanz mit diesen einfachen Zahlenverhältnissen zu erklären. Im Laufe der Zeit begann man einen Zusammenhang zwischen Konsonanz und Obertonreihe zu suchen. Per Erfahrungsdefinition gilt:[20]

> „Das Intervall I(x, y) zweier Töne x und y wird umso konsonanter empfunden, je größer der Anteil gemeinsamer Partialtöne (des Hörbereichs) ist.“[21]

Betrachten wir also die Obertöne zweier Töne, deren Frequenzen im Verhältnis 2:1, 3:2 oder 9:8, sprich im Intervall einer Oktave, Quinte oder Sekunde stehen:

[19] Vgl. Jouannic, Thibault: Comment fonctionne le son?. Consonance, dissonance… pourqoui les sons se marient ou pas?.URL: www.mamie-note.fr [Stand: 26.12.2023].
[20] Vgl. Schüffler, Karlheinz: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma. Mathematische Temperierungstheorie in der Musik. 2. Auflage. Wiesbaden, Deutschland: Springer Spektrum 2017, S. 43 f.
[21] Vgl. ebda, S. 43 f.

**Oktave**

| | Frequenz [Hz] | |
|---|---|---|
| | Note 1 | Note 2 |
| **Grundton** | 100 | 200 |
| 1. Oberton | 200 | 400 |
| 2. Oberton | 300 | 600 |
| 3. Oberton | 400 | 800 |
| 4. Oberton | 500 | 1000 |
| 5. Oberton | 600 | 1200 |
| 6. Oberton | 700 | 1400 |
| 7. Oberton | 800 | 1600 |
| 8. Oberton | 900 | 1800 |
| 9. Oberton | 1000 | 2000 |
| … | … | … |

**Quinte**

| | Frequenz [Hz] | |
|---|---|---|
| | Note 1 | Note 2 |
| **Grundton** | 200 | 300 |
| 1. Oberton | 400 | 600 |
| 2. Oberton | 600 | 900 |
| 3. Oberton | 800 | 1200 |
| 4. Oberton | 1000 | 1500 |
| 5. Oberton | 1200 | 1800 |
| 6. Oberton | 1400 | 2100 |
| 7. Oberton | 1600 | 2400 |
| 8. Oberton | 1800 | 2700 |
| 9. Oberton | 2000 | 3000 |
| … | … | … |

**Sekunde**

| | Frequenz [Hz] | |
|---|---|---|
| | Note 1 | Note 2 |
| **Grundton** | 800 | 900 |
| 1. Oberton | 1600 | 1800 |
| 2. Oberton | 2400 | 2700 |
| 3. Oberton | 3200 | 3600 |
| 4. Oberton | 4000 | 4500 |
| 5. Oberton | 4800 | 5400 |
| 6. Oberton | 5600 | 6300 |
| 7. Oberton | 6400 | 7200 |
| 8. Oberton | 7200 | 8100 |
| 9. Oberton | 8000 | 9000 |
| … | … | … |

*Tabelle 1: Vergleich der Obertöne einer Oktave, einer Quinte und einer Sekunde*

Bei den zwei Tönen, die gemeinsam das Intervall einer Oktave bilden, erkennt man, dass alle Partialtöne des höheren Tones einem Partialton des tieferen Tones entsprechen. Stehen die beiden Töne im Verhältnis 3:2, so entspricht jeder zweite Partialton des höheren Tones einem des tieferen Tones. Betrachten wir nun das Intervall einer Sekunde, so fällt auf, dass nur noch jeder achte Partialton des höheren Tones einem des tieferen Tones entspricht.

Eine eindeutige Erklärung für die Konsonanz und Dissonanz gibt es aber nicht wirklich, da die Schönheit eines Klanges letzten Endes etwas sehr Subjektives ist. Es ist aber eindeutig, dass schöne Frequenzverhältnisse und eine große Anzahl an gemeinsamen Obertönen einen starken Zusammenhang mit der Harmonie in der Musik haben.[22]

### 2.4.2. Die Euler´sche Konsonanzfunktion

Tatsächlich gab es verschiedene Ansätze, um die Harmonie in der Musik genauer zu erklären, unter anderem auch vom bekannten Mathematikern Leonhard Euler, der 1731 eine Konsonanztheorie formulierte. Auch für ihn war die Wahrnehmung musikalischer Intervalle in starker Verbundenheit mit den Frequenzverhältnissen der Töne. So stellte er eine Funktion auf, mit der man den „Verschmelzungsgrad“ zweier Töne berechnen kann:[23]

[22] Vgl. Jouannic, Thibault: Comment fonctionne le son?. Consonance, dissonance… pourqoui les sons se marient ou pas?. URL: www.mamie-note.fr [Stand: 26.12.2023].
[23] Vgl. Schüffler, Karlheinz: Die Tonleiter und ihre Mathematik. S. 197ff.

Aus der Mathematik ist bekannt, dass sich jede natürliche Zahl $z \in \mathbb{N}$ aufgrund der Primfaktorzerlegung in der Form

$$z = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_4} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ mit } \alpha_i \geq 0, i = 1, \cdots k$$

schreiben lässt, wobei $p_1, p_2, p_{3,\ldots,} p_k$ Primzahlen sind und $k \leq z$.

Für zwei Töne, deren Frequenzen im Verhältnis $m{:}n$ stehen, wobei $m$ und $n$ teilerfremde natürliche Zahlen sind, zerlegt man nun das Produkt $z = m \cdot n$ in seine Primfaktoren. Daraus definiert Leonhard Euler seine Konsonanzfunktion:

$$\Gamma: \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \text{ mit } \Gamma(m{:}n) = S(m \cdot n) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (p_i - 1)$$

Dabei gilt: kleine Ergebnisse entsprechen konsonanteren Tonkombinationen. Die Funktion $\Gamma$ wird auch als „Euler´sche Gradusfunktion“ oder „Gradus Suavitatis“ bezeichnet.[24]

In folgender Tabelle sind einige Intervalle, sowie ihre entsprechenden Werte laut Euler´scher Gradusfunktion dargestellt. Man sieht, dass konsonante Intervalle, wie beispielsweise die Prime, kleinere Werte aufweisen als dissonante, wie zum Beispiel die Sekunde.

| **Intervall** | **Frequenzverhältnis** | **Euler´sche Gradusfunktion** |
|---|---|---|
| Prime | 1:1 | $\Gamma(1{:}1) = S(1) = 1 + 1 \cdot (1-1) = 1$ |
| Oktave | 2:1 | $\Gamma(2{:}1) = S(2) = 1 + 1 \cdot (2-1) = 2$ |
| Quinte | 3:2 | $\Gamma(3{:}2) = S(2 \cdot 3) = 1 + 1 \cdot (2-1) + 1 \cdot (3-1) = 4$ |
| Quarte | 4:3 | $\Gamma(4{:}3) = S(2^2 \cdot 3) = 1 + 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (3-1) = 5$ |
| Große Terz | 5:4 | $\Gamma(5{:}4) = S(2^2 \cdot 5) = 1 + 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (5-1) = 7$ |
| Große Sekunde | 9:8 | $\Gamma(9{:}8) = S(2^3 \cdot 3^2) = 1 + 3 \cdot (2-1) + 2 \cdot (3-1) = 8$ |
| | 440:441 | $\Gamma(440{:}441) = S(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11) = 34$ |

*Tabelle 2: Berechnung der Konsonanz einiger Intervalle mithilfe der Euler´schen Gradusfunktion*

Allerdings wird bei genauerer Auseinandersetzung mit dieser Formel schnell klar, dass auch sie nur eine annähernde Erklärung für die Konsonanz in der Musik gibt. Die Quart beispielsweise erhält einen Wert von 5, während die große Terz, die eigentlich als wesentlich konsonanter empfunden wird, einen „Wohlklanggrad“ von 7 hat. Euler selbst sah seine Gradusfunktion mehr wie einen Indikator für die Konsonanz als wie eine tatsächliche Messung des Wohlklangs eines Intervalls.[25]

---

[24] Vgl. Schüffler, Karlheinz: Die Tonleiter und ihre Mathematik. S. 197ff.

[25] Vgl. Jedrzejewski, Franck (2009): Euler et les réseaux harmoniques. URL: https://doi.org/10.7202/1000040ar [Stand: 21.02.2024].

### 2.4.3. Die Schwebung

#### *2.4.3.1. Grundlagen und Bedeutung*

Wenn zwei Töne gleicher Lautstärke mit nur leicht verschiedenen Frequenzen gleichzeitig erklingen, dann nimmt unser Ohr nicht beide Töne getrennt wahr, sondern wir hören einen Ton, dessen Frequenz ungefähr mit der Frequenz des Ausgangstones übereinstimmt. Die Amplitude dieses Tones nimmt dabei mit einer bestimmten Frequenz regelmäßig zu und ab. Dieses An- und Abschwellen des Tones erzeugt eine Art unangenehmen Taktschlag und wird als Schwebung bezeichnet.

Für die Überlagerungsschwingung $y_{res}(t)$ zweier Schwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ mit ähnlichen Frequenzen $f_1$ und $f_2$ und derselben Amplitude $a$ gilt:

$$y_{res}(t) = a \cdot sin(2\pi f_1 t) + a \cdot sin(2\pi f_2 t)$$

Aus der Trigonometrie ist folgende Formel bekannt:

$$sin(p) + sin(q) = 2 \cdot sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Wir setzten für $p$ und $q$ $2\pi f_1 t$ und $2\pi f_2 t$ ein:

$$\begin{aligned} y_{res}(t) &= 2a \cdot sin\left(\frac{2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi f_1 t - 2\pi f_2 t}{2}\right) \\ &= 2a \cdot sin\left(2\pi t \cdot \tfrac{f_1+f_2}{2}\right) \cdot cos\left(2\pi t \cdot \tfrac{f_1-f_2}{2}\right) \\ &= \underbrace{2a \cdot cos\left(2\pi \cdot \tfrac{f_1-f_2}{2} \cdot t\right)}_{\text{Amplitude } A(t)} \cdot sin\left(2\pi \cdot \tfrac{f_1+f_2}{2} \cdot t\right) \end{aligned}$$

Die resultierende Schwingung ist somit eine Sinuswelle mit der Frequenz

$$f_R = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

und einer mit der Frequenz $f_A$ periodisch variierende Amplitude.[26]

$$f_A = \frac{f_2 - f_1}{2}$$

[26] Vgl. Akustische Wellen. Schwebung. URL: Schwebung | LEIFIphysik [Stand: 5.11.2023].

Wenn $f_1 \approx f_2$ sieht der Graf der Überlagerungsschwingung $y_{res}(t)$ folgendermaßen aus:

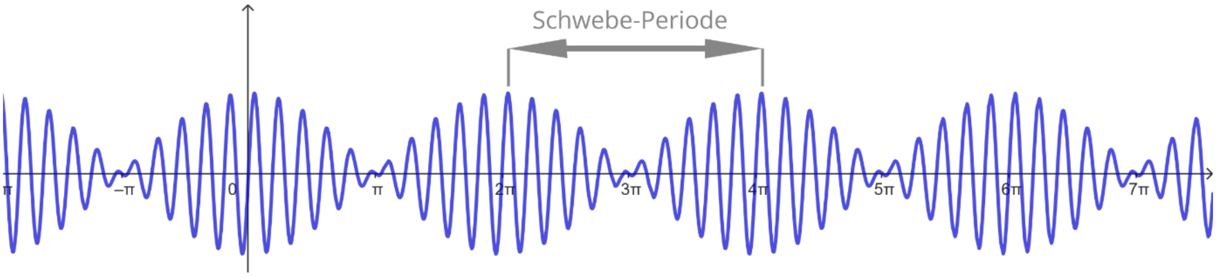


*Abbildung 6: Graf der Summe zweier Schwingungen mit ähnlichen Frequenzen*

Wählt man für $f_1$ und $f_2$ größere Frequenzen, wobei ihre Differenz gleichbleibt, sieht der Graf aus wie eine Fläche, die von zwei um $2\pi$ versetzte Kosinusfunktionen umschlossen wird. Diese beiden um $2\pi$ versetzten Kosinusfunktionen werden als *Einhüllende* bezeichnet. Ihre Formel entspricht $2a \cdot cos(2\pi \cdot f_A \cdot t)$, beziehungsweise $-2a \cdot cos(2\pi \cdot f_A \cdot t)$. Man erkennt hier die Amplitude der zuvor beschriebenen Schwingung $y_{res}$. [27]

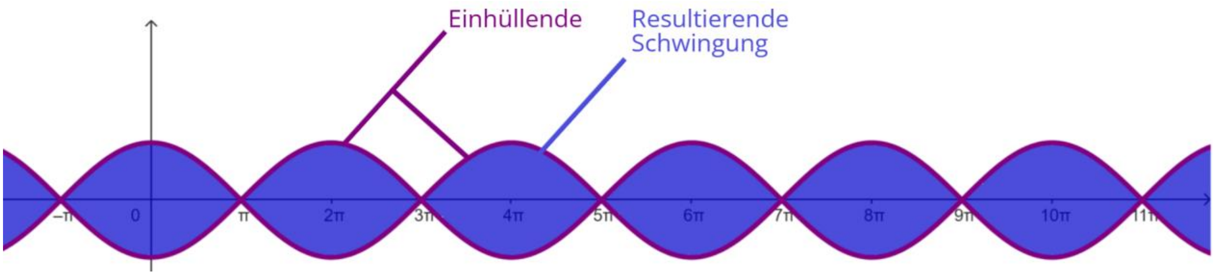


*Abbildung 7: Einhüllende und resultierende Schwingungen zweier Sinusfunktionen mit ähnlichen Frequenzen*

Wie der Abbildung zu entnehmen ist, erreicht die Amplitude der Überlagerungsschwingung regelmäßig den Wert null. Die Tonintensität variiert also zwischen laut (Amplitude 2a) und leise (Amplitude 0). Dieses Phänomen nennt man „Schwebung". Die Frequenz $f_S$, mit der die Amplitude variiert, bezeichnet man als Schwebefrequenz:

$$f_S = 2 \cdot f_A = f_2 - f_1$$

Je kleiner die Schwebungsfrequenz ist, desto besser ist die Schwebung auch hörbar, denn ist sie zu hoch, kann sie gar nicht mehr wahrgenommen werden. Grundsätzlich ist die Schwebung beim Musizieren kein erwünschtes Phänomen, da sie als unangenehm empfunden wird. Töne, bei denen eine Schwebung zu hören ist, gelten als dissonant. Allerdings wird das Phänomen der Schwebung zum Stimmen von Instrumenten verwendet.[28]

[27] Vgl. Akustische Wellen. Schwebung. URL: Schwebung | LEIFIphysik [Stand: 5.11.2023].
[28] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 111 f.

#### 2.4.3.2. Experiment mit GeoGebra

Da hier die Frage offenbleibt, bei welcher Frequenzdifferenz genau eine Schwebung zu hören ist, habe ich an dieser Stelle beschlossen ein kurzes Experiment durchzuführen. Dafür habe ich mit dem Programm GeoGebra einen Tongenerator programmiert, mit dem zwei Töne aufgezeichnet und abgespielt werden können. Die Amplituden und die Frequenzen der beiden Töne werden mittels eines Schiebereglers eingestellt. Mit einer dritten Taste kann schließlich auch der daraus resultierende Überlagerungston abgespielt werden.

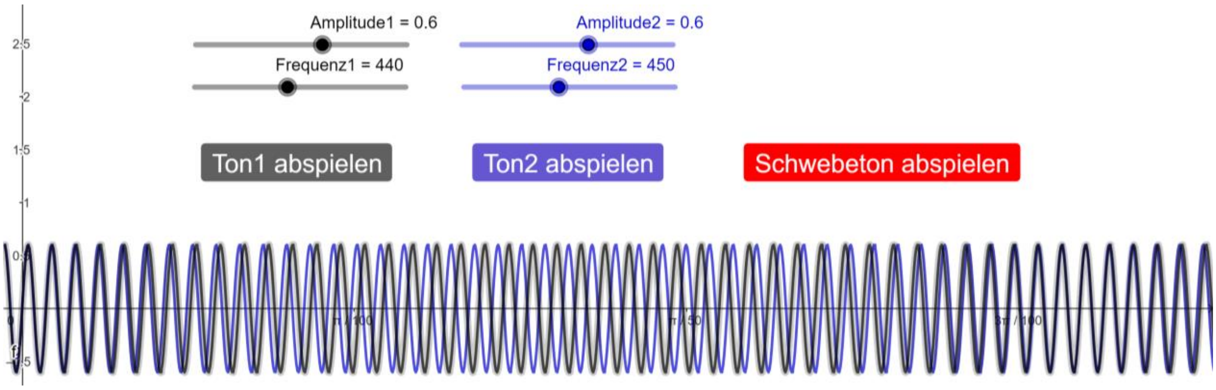


*Abbildung 8: Experiment zu Schwebung auf GeoGebra: Wellenbild von Ton1 und 2*

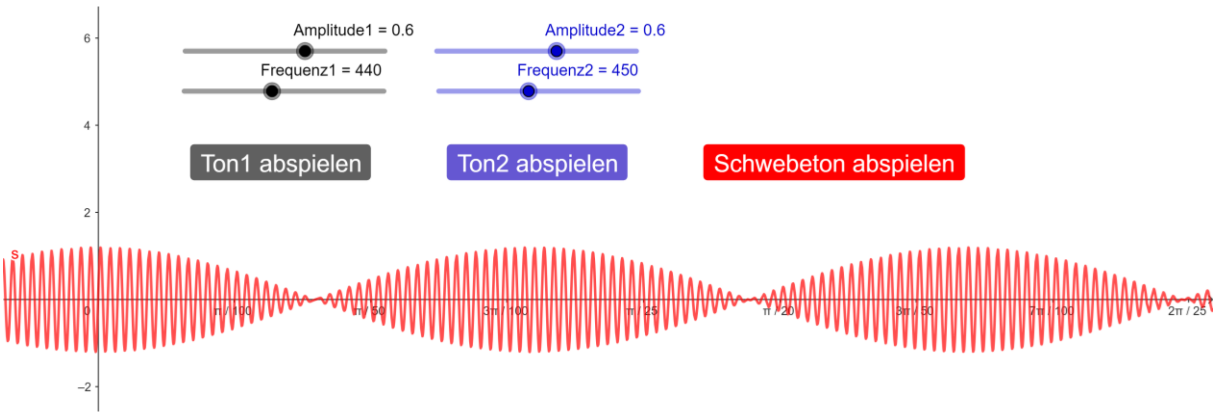


*Abbildung 9: Experiment zur Schwebung auf GeoGebra: Wellenbild des Schwebetons*

Die Amplituden beider Töne wurden gleichgestellt und die Frequenz des ersten Tones auf 440 Hz fixiert, während die Frequenz des zweiten Tones Schritt für Schritt von 441 Hz aus weiter hinaufgestellt wurde. Dabei wurde jedes Mal der Schwebeton abgespielt. Das Ziel war es herauszufinden, wie groß die Differenz der Frequenzen beider Töne sein muss, damit keine Schwebung mehr zu hören ist.

Tatsächlich ist die Schwebung nie ganz verschwunden, sondern die Schwebefrequenz wurde nach einer Weile so groß, dass die Schwebung nur noch als eine Art unangenehmes Vibrieren zu hören war. Dies begann ungefähr bei einer Frequenz von 460 Hz, also bei einer Frequenzdifferenz von 20 Hz. Dies ist allerdings kein genauer Wert, denn ob eine Schwebung nun als Schwebung oder als unangenehme Vibration empfunden wird, hängt vom Zuhörer ab. Auch als die Frequenz des zweiten Tones auf 550 Hz gestellt wurde und die beiden Töne somit im Intervall einer großen Terz standen, klang der Ton nicht annähernd so konsonant, wie es auf einem Klavier der Fall wäre.

Zur Sicherheit wurde das Experiment ebenfalls mit zwei Stimmgabeln auf Resonanzkörpern durchgeführt, deren Frequenzen mit kleinen Gewichten geändert werden können. Die eine Stimmgabel blieb stets auf 440 Hz, während die Frequenz der anderen schrittweise verkleinert wurde, indem die Gewichte weiter nach oben geschoben wurden. Das Ergebnis war genau dasselbe: Die Schwebefrequenz wurde immer größer und die Schwebung ging ab einer Differenz von ungefähren 20 Hz in ein störendes Vibrieren über.

Aus diesen Beobachtungen lässt sich schlussfolgern, dass tatsächlich immer eine Schwebung entsteht, wenn zwei Töne gleichzeitig erklingen, die nicht genau die gleiche Frequenz haben. Diese Schwebung ist aber nicht immer zu hören, weil ab einer bestimmten Differenz der beiden Frequenzen, die Schwebefrequenz zu hoch ist, um als Schwebung wahrgenommen zu werden. Bei Instrumenten kommt es glücklicherweise nicht wie bei den reinen Tönen von GeoGebra oder den annähernd reinen Tönen der Stimmgabeln zu dieser unangenehmen Vibration, weil die Schwebung durch die vielen Obertöne sozusagen untergeht.

*Abbildung 10: Experiment zur Schwebung mit Stimmgabeln*

# 3. Stimmungen und Temperierung

## 3.1 Einführung

Beim Stimmen eines Instruments mit festen Tonhöhen, wie beispielsweise dem Klavier, spielt die Temperierung eine wichtige Rolle. Ihr Ziel ist es nämlich, alle Töne einer Oktave so zu unterteilen, dass dem Komponisten so viel Freiheit gewährt wird wie möglich.[29] Freiheit in Bezug auf Komposition bedeutet allerdings auch, dass auf die Reinheit gewisser Intervalle verzichtet werden muss und dies ist ein Problem, das sowohl Musiker als auch Mathematiker Jahrhunderte lang beschäftigte.

## 3.2 Die Pythagoräische Stimmung

### 3.2.1 Allgemeines über die Pythagoräer

Schon in der Antike versuchte man die Musik mathematisch zu begründen. Einer der Ersten war Pythagoras, der im 6. Jhdt. vor Christus lebte und die sogenannte pythagoräische Schule gründete. Die Pythagoräer waren nämlich nicht nur Mathematiker, sondern auch Philosophen, Politiker und nicht zu vergessen, Musikwissenschaftler. Sie waren davon überzeugt, dass das gesamte Universum und ebenso die Musik anhand mathematischer Gesetze und ganz besonders anhand von Zahlenverhältnissen begründet werden kann.[30]

### 3.2.2 Das Monochord-Experiment

Einer Legende nach soll Pythagoras eines Tages an einer Schmiedewerkstatt vorbeigegangen sein und zufällig bemerkt haben, dass die verschiedenen Hämmer, als sie gegen die Ambosse schlugen, verschiedene Töne erzeugten und dass einige dieser Töne gemeinsam besser harmonierten, sprich konsonanter klangen als andere. Nach der Durchführung einiger Experimente soll er schließlich zu dem Schluss gekommen sein, dass die konsonanteren Töne durch die Hämmer entstanden, deren Gewichte in „einfachen Proportionen" zueinanderstanden. Damit sind Proportionen gemeint, die aus kleinen natürlichen Zahlen bestehen, wie beispielsweise 2:1 oder 4:3. Es ist diese Erkenntnis, die ihn angeregt haben soll,

[29] Vgl. Vereinigung der Orgelsachverständigen Deutschlands. Temperierung und Stimmung. URL: Temperierung und Stimmung (orgelexperte.de) [Stand: 28.01.2024].

[30] Vgl. Reichle, Maria: Mathe macht Musik!. Fächerverbindender Unterricht in Mathematik und Musik in der Grundschule. Universität Augsburg. Zulassungsarbeit gem. § 30 LPO I für das Lehramt an Grundschulen 2010, S. 6-13.

ein sogenanntes Monochord zu bauen, um damit eine mathematische Erklärung für die Konsonanz in der Musik zu finden.[31]

Ein Monochord ist ein Instrument, das aus einer einzigen Saite besteht, die auf einem Holzbrett gespannt ist. Um verschiedene Töne zu erzeugen, muss die Länge der Saite verändert werden und dies geschieht mittels eines bewegbaren Steges. Hierbei gilt laut physikalischer Gesetze: Je kürzer die Saite, desto höher die Frequenz. Beim Experimentieren mit dem Monochord stellten die Pythagoräer fest, dass zwei Saiten, deren Längen in einem einfachen Verhältnis zueinanderstehen, gemeinsam für das menschliche Ohr angenehmer klingen. Wird die Saite des Monochords beispielsweise um die Hälfte gekürzt, erhalten wir das Verhältnis 2:1 und eine Note, die eine Oktave höher ist als die Ausgangsnote. Kürzt man die Saite um ein Drittel ihrer Länge, so entsteht das Verhältnis 3:2. Dieses Verhältnis bildet in der Musik das Intervall einer reinen Quinte. Das letzte wichtige Verhältnis, nämlich das Verhältnis 4:3, erhält man, wenn die Saite um ein Viertel ihrer Länge gekürzt wird und entspricht einer reinen Quarte. Da die Länge einer Saite die Frequenz eines Tones bestimmt, lässt sich aus dem Experiment schlussfolgern, dass musikalische Intervalle durch die Frequenzverhältnisse zweier Töne gegeben sind. Wichtig anzumerken ist noch, dass bei der Verkettung von Intervallen die Frequenzverhältnisse nicht addiert, sondern multipliziert werden.[32]

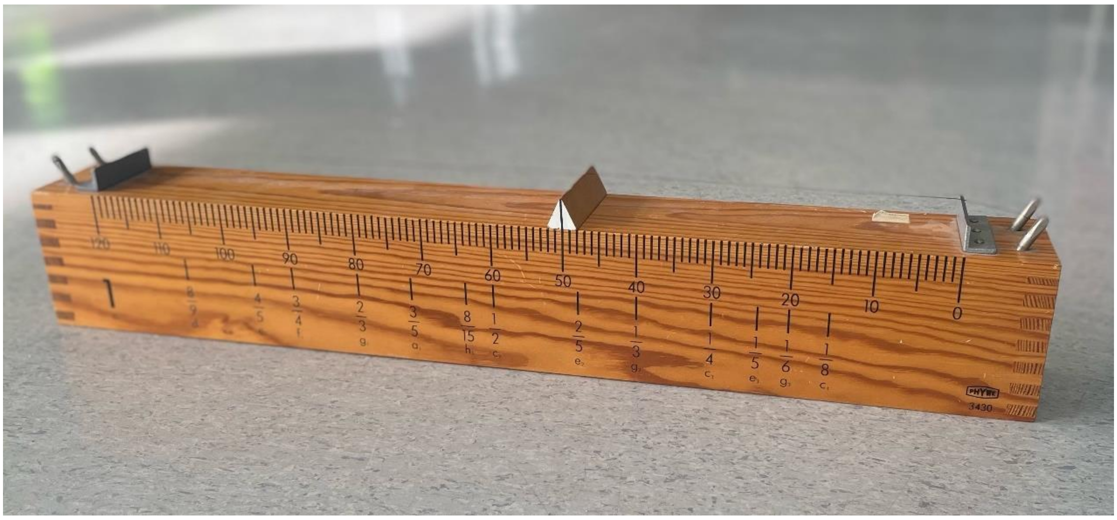


*Abbildung 11: Monochord*

[31] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 119 f.
[32] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 12.

Angenommen die Saite eines Monochords hat die Länge 1 und eine Frequenz von 264 Hz (dies entspricht der Note c'). Halbieren wir nun diese Saite, so beträgt ihre Länge $1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$. Die Frequenz wird dadurch verdoppelt und beträgt $264 \cdot \frac{2}{1} = 528\ Hz$. Dies entspricht der Note c''. Die Frequenzen stehen im Verhältnis 2:1 und das entstandene Intervall ist eine Oktave. Würden wir die Saite des Monochords nicht halbieren, sondern um ein Drittel reduzieren, so hätte sie die Länge $1 \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ und eine Frequenz von $264 \cdot \frac{3}{2} = 396$ Hz (= Note g'). Wir hätten hier das Verhältnis 3:2 und das entstandene Intervall wäre eine Quinte. Auf ähnliche Art und Weise kann auch die Note f' und somit eine reine Quart erzeugt werden.

Der Übersichtlichkeit halber ist oben Genanntes noch einmal in einer Tabelle dargestellt:

| **Verhältnis zur ganzen Saite*** | **Saitenlänge** | **Frequenz (Hz)** | **Note** | **Intervall** |
|---|---|---|---|---|
| 1:1 | 1 | 264 | c' | Prime |
| 4:3 | $1 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}75$ | $264 \cdot \frac{4}{3} = 352$ | f' | Reine Quarte |
| 3:2 | $1 \cdot \frac{2}{3} \approx 0{,}667$ | $264 \cdot \frac{3}{2} = 396$ | g' | Reine Quinte |
| 2:1 | $1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$ | $264 \cdot \frac{2}{1} = 528$ | c'' | Oktave |

*Tabelle 3: Ergebnisse des Monochordexperiments: Intervalle und Frequenzverhältnisse*
*(* Die ganze Saite hat die Saitenlänge 1 und eine Frequenz von 264 Hz und entspricht somit der Note c '.)*

### 3.2.3 Aufbau der pythagoräischen Stimmung

Wie bereits in der Einführung erwähnt wurde, geht es bei der Temperierung darum, eine gewisse Anzahl an Tönen innerhalb einer Oktave so in einem System zu definieren, dass ein Instrument nach diesem System gestimmt und gut damit musiziert werden kann. Die Pythagoräer kamen auf die Idee ein solches Stimmungssystem nur mithilfe von Quinten und Oktaven, also mit den Frequenzverhältnissen 3:2 und 2:1, zu konstruieren.[33]

[33] Vgl. Houlou-Garcia, Antoine: La musique des nombres. In: Cosinus. N°205 Juni 2018, S. 34-39.

Sie bauten also eine Tonleiter auf, indem sie von einer Basisnote ausgingen, zum Beispiel der Note c′, und von dieser eine reine Quinte hinaufgingen. So ergibt sich die Note g′. Der Basisnote gab man den Referenzwert 1 und der zweiten Note den Wert $\frac{3}{2} = 1{,}5$, da dies den Frequenzverhältnissen einer Quinte entspricht. Von dieser neuen Note ging man auf gleiche Art und Weise wieder eine Quinte hinauf. Man landete also auf der Note d′′ mit dem Wert $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2{,}25$. Da es aber hier das Ziel war, alle Töne innerhalb einer einzigen Oktave zu definieren und somit einen Wert zwischen eins und zwei zu erhalten, ging man eine Oktave hinunter, das heißt man dividierte das Ergebnis durch zwei. Somit erhielt man die Note d′ mit dem Wert $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1{,}125$. Wenn man diesen Vorgang mehrmals wiederholte, erhielt man immer wieder neue Noten, die alle mit der Formel $\left(\frac{3}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^q$ (mit $p,q \in \mathbb{N}$) beschrieben werden können. Die Ergebnisse für die ersten zwölf Quinten sind in folgender Tabelle dargestellt. [34]

Multiplikation mit 3:2

| Basisnote | 1. Quinte | 2. Quinte | 3. Quinte | 4. Quinte | 5. Quinte | 6. Quinte | 7. Quinte | 8. Quinte | 9. Quinte | 10. Quinte | 11. Quinte | 12. Quinte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,5 | 2,25 | 3,38 | 5,06 | 7,59 | 11,39 | 17,09 | 25,63 | 38,44 | 57,67 | 86,5 | 129,75 |
| | | 1,13 | 1,69 | 2,53 | 3,8 | 5,7 | 8,54 | 12,81 | 19,22 | 28,83 | 43,25 | 64,87 |
| | | | | 1,27 | 1,9 | 2,85 | 4,27 | 6,41 | 9,61 | 14,42 | 21,62 | 32,44 |
| | | | | | | 1,42 | 2,14 | 3,2 | 4,81 | 7,21 | 10,81 | 16,22 |
| | | | | | | | 1,07 | 1,6 | 2,4 | 3,6 | 5,41 | 8,11 |
| | | | | | | | | | 1,2 | 1,8 | 2,7 | 4,05 |
| | | | | | | | | | | | 1,35 | 2,03 |
| | | | | | | | | | | | | 1,01 |
| | | | | | | | | | | | | |
| c | g | d | a | e | h | fis | cis | gis | dis | ais | f | ~c |

Division durch 2

*Tabelle 4: Pythagoräische Tonleiter: Frequenzverhältnis zur Basisnote (in Dezimaldarstellung)*

Man sieht, dass man nach der siebten Quinte bei einer Note ankommt, die mit einem Wert von 1,07 relativ nahe an der Basisnote liegt. Da die Zahl sieben eine besonders wichtige Zahl für die Pythagoräer war (es gab laut ihnen beispielsweise 7 Planeten), blieben sie auch bei der 7. Quinte stehen. Die Pythagoräer rundeten ihren Wert (1,07) auf 1, beziehungsweise 2,14 auf 2 und ordneten die Noten der Größe ihrer Werte nach auf. Somit hatten sie eine Tonleiter mit sieben Noten definiert.[35]

[34] Vgl. Houlou-Garcia, Antoine: La musique des nombres. In: Cosinus. N°205 Juni 2018, S. 34-39.
[35] Vgl. La fabuleuse histoire des notes de musique. La gamme de Pythagore. URL: La gamme de Pythagore - La fabuleuse histoire des notes de musique - EasyZic [Stand: 12.08.2023].

Eine Sache änderten die Pythagoräer noch. Die vierte Note entsprach mit einem Wert von 729/512 = 1,42 keinem „einfachen“ Verhältnis. Sie merkten, dass sie diese Note ersetzen konnten, indem sie eine Quinte von der Basisnote hinunter und dann eine Oktave hinaufgingen. Diese Note hatte also den Wert $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3} = 1,\dot{3}$ und liegt somit eine reine Quarte über der Basisnote. Diese Änderung eignete sich auch deshalb so gut, weil eine Quarte und eine Quinte gemeinsam genau eine Oktave bilden: $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{1}$. Aus heutiger Sicht würde man sagen, dass die Note fis durch ein f ersetzt wurde. Die pythagoräische Tonleiter sieht also folgendermaßen aus:[36]

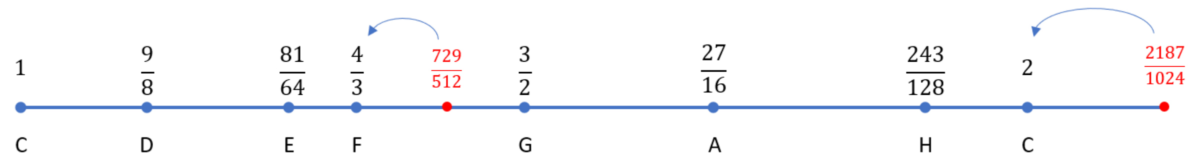


*Abbildung 12: Pythagoräische Tonleiter*

### 3.2.4. Die Probleme der pythagoräischen Stimmung

Wenn wir uns nicht wie die Pythagoräer auf sieben Noten beschränken, sondern mehr Quinten bilden, bemerken wir, dass wir tatsächlich nach der 12. Quinte am nächsten an der Ausgangsnote ankommen. Würden wir also wie in Tabelle 5 eine Tonleiter mit 12 Tönen bilden, so würden wir ein Stimmungssystem erhalten, das unserem heutigen sehr ähnelt und auf den ersten Blick sehr praktikabel scheint. Allerdings kommen wir auch nach der 12. Quinte nicht genau auf unsere Anfangsnote c' mit dem Wert 1 zurück, sondern erhalten einen etwas größeren Wert, nämlich:

$$\varepsilon = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}013643 \ldots$$

Dieses Epsilon wird als „Pythagoräisches Komma“ bezeichnet und ist das große Problem, das die pythagoräische Stimmung aus heutiger Sicht unbrauchbar macht. Denn auch wenn dieser Wert nur minimal vom Ausgangswert 1 abzuweichen scheint, so beträgt die Differenz aber tatsächlich beinahe ein Viertel eines regulären Halbtons. Da nach der zwölften Quinte der Wert 2,03 auf 2 gerundet wird, um eine Oktave zu erhalten, fehlt genau dieses Epsilon der

[36] Vgl. La fabuleuse histoire des notes de musique. La gamme de Pythagore. URL: La gamme de Pythagore - La fabuleuse histoire des notes de musique - EasyZic [Stand: 12.08.2023].

letzten Quinte (Quinte zwischen f' und c''). Aus diesem Grund klingt diese Quinte dissonant und da ihr Klang dem Heulen eines Wolfes ähnelt, wird sie als „Wolfsquinte" bezeichnet.[37]

Diese Wolfsquinte kann leider nicht vermieden werden, denn es ist unmöglich nur reine Quinten so zu verketten, dass sie eine genaue Anzahl an Oktaven ergeben. Dies lässt sich mathematisch mittels eines Widerspruchsbeweises zeigen:

Wenn es möglich wäre, eine natürliche Anzahl p an Quinten so zu verketten, dass man eine natürliche Zahl q an Oktaven erhält, dann würde gelten:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{p} = 2^{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{3^{\rho}}{2^{p}} = 2^{q} \quad \Rightarrow \quad 3^{\rho} = 2^{\rho+q}$$

Da jede Potenz von 3 eine ungerade Zahl und jede Potenz von 2 eine gerade Zahl ergibt, kann die Gleichung $3^{\rho} = 2^{\rho+q}$ niemals stimmen. [38]

Egal auf wie viele Töne wir unsere Tonleiter beschränken, beziehungsweise wie viele Quinten wir verketten, ist es unmöglich mit einer solchen Verkettung genau auf die Anfangsnote zurückzukommen. Man wird immer mehr neue Noten erhalten. Dies wird grafisch mit einer Spirale dargestellt:[39]

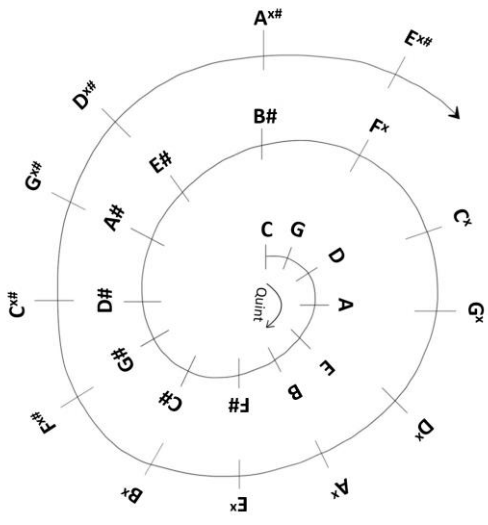


*Abbildung 13: Pythagoräische Quintenspirale*

---

[37] Vgl. Schüffler, Karlheinz: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma. S. 3 f.
[38] Vgl. Fauvel, John/ Flood, Raymond/ Wilson, Robin: Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals. 1. Auflage. New York, United States: Oxford University Press 2003, S. 18 f.
[39] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 123.

Ein weiteres Problem der pythagoräischen Tonleiter liegt in den Halb- und Ganztonschritten. Wie in der Abbildung 11 zu erkennen ist, bilden zwei nebeneinanderliegende Töne entweder ein Intervall mit dem Wert $\frac{9}{8} = 1{,}125$ oder ein Intervall mit dem Wert $\frac{256}{243} \approx 1{,}053$. Das etwas kleinere Intervall ($\frac{256}{243}$) liegt zwischen der dritten und vierten und zwischen der siebten und achten Note und wird als Halbton bezeichnet. Auf einer Klaviertastatur erkennt man Halbtöne daran, dass zwischen diesen Noten jeweils keine schwarze Taste liegt.

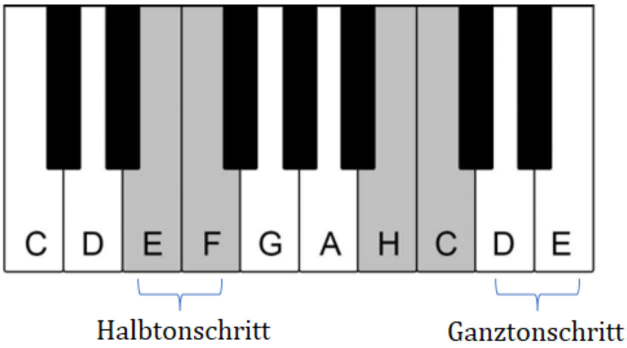


*Abbildung 14: Halb- und Ganztonschritte auf der Klaviertastatur*

Das größere Intervall ($\frac{9}{8}$) befindet sich zwischen den anderen Noten und wird als Ganzton bezeichnet. Nun sollten zwei Halbtöne gemeinsam einen Ganzton bilden, aber dies ist hier nicht der Fall:

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}} \neq \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

Tatsächlich beträgt das Intervall zwischen zwei Halbtönen und einem Ganzton genau den Wert des pythagoräischen Kommas:

$$\frac{9}{8} : \left(\frac{256}{243}\right)^2 = 1{,}01364 \ldots = \varepsilon$$

Dass zwei Halbtöne nicht einem Ganzton entsprechen, ist ein großes Problem, denn das gibt uns zwei Möglichkeiten, um beispielsweise die Note Cis zu definieren. Um diese Note zu erhalten, kann man vom C einen Halbton hinaufgehen und erhält den Wert $1 \cdot \frac{256}{243} \approx 1{,}053$. Man kann aber auch von der Note D einen Halbton hinuntergehen und erhält hier für die gleiche Note einen anderen Wert, nämlich $\frac{9}{8} : \frac{256}{243} \approx 1{,}068$.[40]

[40] Vgl.: Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 121 f.

Diese Inkongruenz zwischen zwei Halbtönen und einem Ganzton macht vor allem die Transposition unmöglich. Letztere ist ein Vorgang, bei dem eine Melodie in eine andere Tonart übertragen wird, wobei jede Note um dasselbe Intervall erhöht beziehungsweise erniedrigt wird. Dieses Intervall ist dabei meist ein Halb- oder Ganzton.[41]

## 3.3 Die reine Stimmung

### 3.3.1. Die Erfindung der reinen Stimmung

Obwohl die pythagoräische Stimmung nur mittels Oktaven, Quinten und Quarten, also mittels einfacher Intervalle konstruiert worden war, enthielt sie dennoch viele Intervalle, die weniger „einfachen“ Frequenzverhältnissen entsprachen und daher auch weniger konsonant klangen. So entsprach die große Terz beispielsweise dem Verhältnis $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 81:64$ und die große Sexte dem Verhältnis $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 27:16$. Da sich aber in der frühen Renaissance die mehrstimmige Musik entwickelte, gab man sich nicht mehr mit den reinen Quarten, Quinten und Oktaven zufrieden, sondern wollte auch reine Terzen (Verhältnis 5:4) und reine Sexten (Verhältnis 5:3). So wurden während des 16. Jahrhunderts diese neue Terz und Sexte in die pythagoräische Tonleiter eingebaut und die sogenannte „reine Stimmung“ entstand.[42]

### 3.3.2. Aufbau der reinen Stimmung

Für die reine Stimmung ersetzte man also das Verhältnis 81:64 der pythagoräischen Terz durch das einfachere Verhältnis 80:64 = 5:4 und das Verhältnis 27:16 der pythagoräischen Sexte durch das schönere 25:15 = 5:3, denn diese einfacheren Proportionen erzeugten konsonantere Töne. Somit entsprachen beinahe alle Töne der Tonleiter einfachen Verhältnissen. Einzig die siebte Note war mit ihrem Verhältnis 243:128 noch nicht zufriedenstellend und wurde, da eine Terz und eine Quinte gemeinsam eine Septim bilden, durch den einfacheren Bruch $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$ ersetzt.[43]

[41] Vgl. Brunotts, Kate (20.04.2023): Musik Transposition. Der ultimative Leitfaden. URL: Musik Transposition: Der ultimative Leitfaden (emastered.com) [Stand: 18.08.2023].
[42] Vgl. Fauvel, John/ Flood, Raymond/ Wilson, Robin: Music and Mathematics. S. 19 f.
[43] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 123.

Die neue Tonleiter sah also wie folgt aus:

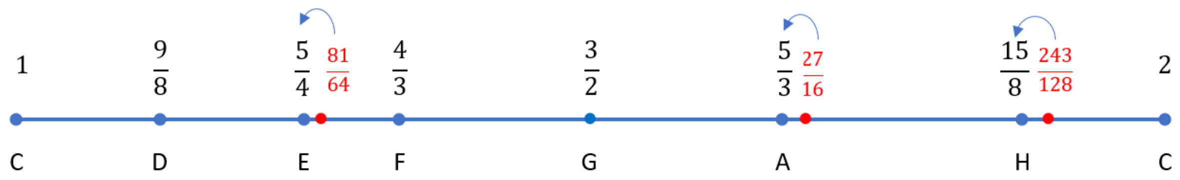


*Abbildung 15: Aufbau der reinen Stimmung auf Basis der pythagoräischen Stimmung*

### 3.3.3. Die Probleme der reinen Stimmung

Die reine Stimmung ist allerdings nicht fehlerfrei und weist genauso wie die pythagoräische Tonleiter viele Probleme auf, wenn nicht sogar mehr. Einerseits hat die reine Stimmung zwei verschiedene Ganztöne, nämlich $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$, und einen Halbton mit einem Wert von $\frac{16}{15}$, der immer noch nicht genau halb so groß ist wie ein Ganzton (egal auf welchen Ganzton wir uns hier beziehen):

$$\left(\frac{16}{15}\right)^2 = \frac{256}{225} \approx 1{,}138 > \frac{9}{8} = 1{,}125 > \frac{10}{9} \approx 1{,}111$$

Dies bedeutet, dass die Transposition noch immer schwer möglich ist, beziehungsweise aufgrund der zwei unterschiedlichen Ganztöne noch komplizierter wird. Der Unterschied (wie immer als Frequenzverhältnis gemessen) zwischen diesen zwei Ganztönen wird als syntonisches Komma bezeichnet und ist vergleichbar mit dem pythagoräischen Komma. Das syntonische Komma hat einen Wert von

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80} = 1{,}0125.$$ [44]

Des Weiteren sind nicht alle Quinten in der reinen Stimmung wirklich rein, anders gesagt: nicht alle Quinten entsprechen dem Verhältnis 3:2. Da, um die reine Stimmung zu kreieren, der sechste Ton der pythagoräischen Tonleiter (die Note a) leicht verändert wurde, hat sich die Quinte zwischen a und d (zweiter Ton) etwas verkleinert und entspricht dem Verhältnis $\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27}$. Diese Quinte ist tatsächlich genau um das syntonische Komma kleiner als die reine Quinte:

[44] Vgl. Fauvel, John/ Flood, Raymond/ Wilson, Robin: Music and Mathematics. S.21 f.

$$\frac{3}{2} : \frac{40}{27} = \frac{81}{80} = 1{,}0125$$

Die reine Stimmung scheint also, mehr Probleme geschaffen als gelöst zu haben.[45]

## 3.4. Die gleichstufig temperierte Stimmung

### 3.4.1. Entstehung der gleichstufig temperierten Stimmung

Die gleichstufig temperierte Stimmung (auch gleichstufige Stimmung genannt) wurde vom Mathematiker Simon Stevin (1548-1620) definiert und sollte endlich alle Probleme der pythagoräischen Stimmung lösen.[46]

Simon Stevin wollte die Oktave in genau 12 gleich große Halbtöne unterteilen. Es galt also:

$$H^{12} = 2 \Rightarrow H = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1{,}05946 \ldots$$

Alle anderen Intervalle, also Terzen, Quarten, Quinten etc. definierte er auf Basis dieses Halbtons $H = 2^{1/12}$. Eine Quinte besteht beispielsweise aus sieben Halbtönen. Sie erhielt daher den Wert $2^{7/12} \approx 1{,}498$ und eine Quart, da sie aus fünf Halbtönen besteht, den Wert $2^{5/12} \approx 1{,}335$. Dies ergibt eine Tonleiter mit zwölf Tönen:[47]

| Note | C | Cis | D | Dis | E | F | Fis | G | Gis | A | Ais | H | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenz-verhältnis zur Basisnote | $2^{0/12}$ | $2^{1/12}$ | $2^{2/12}$ | $2^{3/12}$ | $2^{4/12}$ | $2^{5/12}$ | $2^{6/12}$ | $2^{7/12}$ | $2^{8/12}$ | $2^{9/12}$ | $2^{10/12}$ | $2^{11/12}$ | $2^{12/12}$ |
| | 1 | 1,059 | 1,122 | 1,189 | 1,26 | 1,335 | 1,414 | 1,498 | 1,587 | 1,682 | 1,782 | 1,888 | 2 |

*Tabelle 5: Die gleichstufig temperierte Stimmung*

Da in diesem System die Halbtöne alle gleich groß und auch genau halb so groß wie ein Ganzton sind, ist die Transposition mit der gleichstufig temperierten Stimmung problemlos möglich. Auch die Quintenspirale schließt sich nun und wird zu einem Kreis, dem heute sehr bekannten Quintenzirkel.

[45] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 129 f.
[46] Vgl. Fauvel, John/ Flood, Raymond/ Wilson, Robin: Music and Mathematics. S.24 f.
[47] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 133 f.

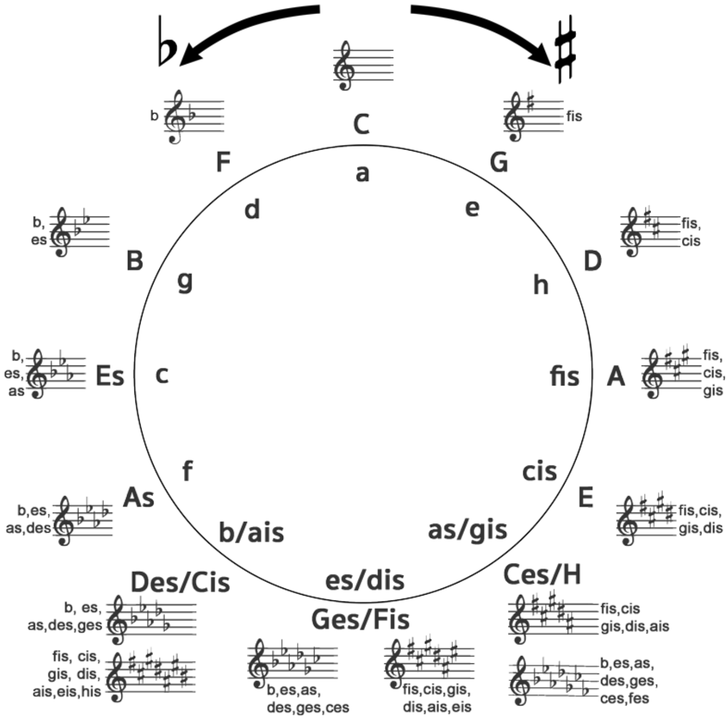


*Abbildung 16: Der Quintenzirkel*[48]

## 3.4.2. Die gleichstufig temperierte Stimmung als Kompromiss

Einen großen Nachteil hat die gleichstufige Stimmung trotzdem. Kein Intervall, außer die Oktave, ist nach der Vorstellung der Pythagoräer wirklich rein. Die anderen Stimmungen bevorzugten es, einige perfekt klingende Intervalle und dafür andere ungenauere Intervalle zu haben, während die gleichstufige Stimmung beinahe nur aus unreinen Intervallen besteht (die einzige Ausnahme bildet die Oktave). Der Unterschied zwischen der reinen Quinte und der Quinte der gleichstufig temperierten Stimmung beträgt beispielsweise

$$\frac{3}{2} : 2^{7/12} \approx 1{,}00113.$$

Dieser Wert liegt aber viel näher an 1 als das pythagoräische oder das syntonische Komma. Die gleichstufig temperierte Stimmung hat sozusagen das pythagoräische Komma gleichmäßig auf alle Töne verteilt, weshalb zwar alle Töne aus Sicht des Monochordexperiments falsch sind, aber keiner so stark abweicht, wie es in den anderen Stimmungen für einige Intervalle der Fall war.[49]

[48] Gorski, Markus: Der Quintenzirkel. URL: Der Quintenzirkel (lehrklaenge.de) [Stand: 23.02.2024].
[49] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 133 f.

Die gleichstufig temperierte Stimmung bietet den Musikern somit viel mehr Freiheit beim Komponieren, da beispielsweise keine Wolfsquinten mehr vermieden werden müssen oder die Transposition grenzenlos möglich ist. Das ist auch der Grund, warum sie sich bis heute durchgesetzt hat und für die Stimmung aller Instrumente mit festen Tonhöhen verwendet wird. Wenn man bedenkt, welchen großen Wert die Pythagoräer auf Konsonanz basierend auf „schöne" Proportionen legten, scheint es beinahe ironisch zu sein, dass unser heutiges Tonsystem schlussendlich auf einer irrationalen Zahl ($\sqrt[12]{2}$) basiert.[50]

## 3.5. Das Centmaß

Um verschiedene Stimmungssysteme besser vergleichen und sehr kleine Intervalle berechnen zu können, wurde ungefähr 1875 von Alexander Ellis das Centmaß eingeführt. Das Centmaß ist ein logarithmisches Maß. Das bedeutet, dass bei Verkettung von Intervallen die Cents addiert und nicht wie die Frequenzverhältnisse multipliziert werden.

Es wurde festgelegt, dass ein Halbton aus 100 Cent besteht. Ein Ganzton entspricht daher 200 Cent und eine Oktave, da sie aus 12 Halbtönen besteht, 1200 Cent.

Ein Cent hat daher den Wert

$$c^{1200} = 2 \Rightarrow c = \sqrt[1200]{2} = 1{,}00057779.$$ [51]

Menschen mit durchschnittlichem Gehör können zwei verschiedene Töne differenzieren, wenn sie mindestens 4 bis 8 Cent auseinanderliegen.

Das Centmaß eines Intervalls, mit dem Frequenzverhältnis $r = \frac{f_2}{f_1}$ wird mit folgender Formel berechnet: [52]

$$c(r) = 1200 \cdot log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 1200\left(\frac{ln(r)}{ln(2)}\right)$$

[50] Vgl. Fauvel, John/ Flood, Raymond/ Wilson, Robin: Music and Mathematics. S.26 f.
[51] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 30 f.
[52] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 138 f.

In folgender Tabelle werden die pythagoräische, reine und gleichstufige Stimmung mithilfe des Centmaßes verglichen:[53]

| | | C | D | E | F | G | A | H | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pythagoräische Stimmung** | Frequenzverhältnis | 1 | 9/8 | 81/64 | 4/3 | 3/2 | 27/16 | 243/128 | 2 |
| | Cents | 0 | 203,91 | 407,82 | 498,04 | 701,95 | 905,86 | 1109,77 | 1200 |
| **Reine Stimmung** | Frequenzverhältnis | 1 | 9/8 | 5/4 | 4/3 | 3/2 | 5/3 | 15/8 | 2 |
| | Cents | 0 | 203,91 | 386,31 | 498,04 | 701,95 | 884,35 | 1088,26 | 1200 |
| **Gleichstufige Stimmung** | Frequenzverhältnis | 1 | 1,1224 | 1,26 | 1,334 | 1,498 | 1,681 | 1,887 | 2 |
| | Cents | 0 | 200 | 400 | 500 | 700 | 900 | 1100 | 1200 |

*Tabelle 6: Vergleich der Stimmungssysteme mithilfe des Centmaßes*

Aus der Tabelle geht hervor, dass die Centwerte der pythagoräischen Stimmung meist über denen der gleichstufigen Stimmung liegen, während die reine Stimmung eher Werte aufweist, die kleiner als die der gleichstufigen Stimmung sind.

[53] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 30 f.

# 4. Die Mathematik der Komposition

## 4.1 Einführung

Bisher ist die Mathematik eher in musiktheoretischen Konzepten versteckt geblieben. Mit diesem Kapitel soll verdeutlicht werden, inwiefern sich Musiker in ihrer Arbeit mit der Mathematik auseinandersetzen. Wie stark Mathematik hinter einer Komposition zu spüren ist, hängt natürlich stark von den Komponisten ab, doch ein Teilgebiet der Mathematik brauchen sie alle, und zwar die Geometrie. Geometrisch-musikalische Transformationen sind nämlich ein grundlegendes Werkzeug jedes Komponisten. Einige Musiker werden jedoch viel weiter gehen und sich einer beinahe gänzlich mathematischen Kompositionsmethode widmen. Ein Beispiel dafür ist die Zwölftonmusik. Geht es außerdem um das Zusammenspiel von Kunst und Mathematik, so darf auch der Goldenen Schnitt nicht unerwähnt bleiben.

## 4.2 Geometrisch-musikalische Transformationen

### 4.2.1 Isometrische Transformationen

In der Mathematik wird bei einer isometrischen Transformation eine geometrische Figur so transformiert, dass ihre Winkel und Längen gleichbleiben. Wichtig ist, dass Kombinationen isometrischer Transformationen stets eine weitere isometrische Transformation ergeben. Man unterscheidet hier drei Formen, nämlich Translation, Spiegelung und Drehung.[54]

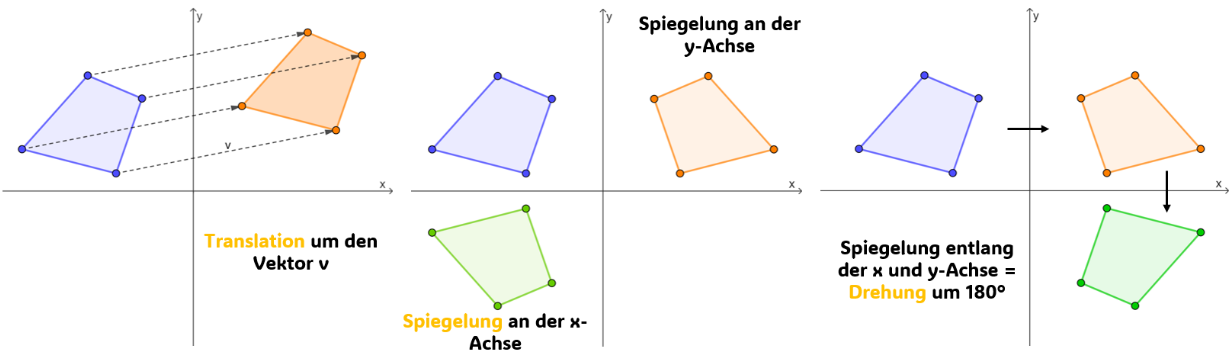


*Abbildung 17: Grafische Darstellung einer Translation, Spiegelung und Drehung*

- Unter der **Translation** versteht man das Verschieben einer geometrischen Figur entlang der x- oder y-Achse beziehungsweise um einen bestimmten Vektor.
- Bei einer **Spiegelung** wird eine geometrische Figur entlang einer Gerade gespiegelt.

[54] Vgl. McKinsey, Malcolm (12.01.2023): Transformations in Math. Definitions, Types and Examples. URL: Transformations in Math - Definition, Types & Examples (tutors.com) [Stand: 28.01.2024].

- Unter einer **Drehung** versteht man das Rotieren eines geometrischen Körpers rund um einen Punkt in einem bestimmten Winkel. Relevant für dieses Kapitel ist allerdings nur die Rotation um 180°. Diese Rotation kann durch eine doppelte Spiegelung entlang der x- und y-Achse erreicht werden und entspricht einer Spiegelung am Ursprung.[55]

Bei einer musikalischen Isometrie werden die Abstände zwischen den Noten beibehalten. Man unterscheidet wieder dieselben drei Formen (Translation, Spiegelung und Drehung), wobei bei jeder dieser Form zwischen vertikaler und horizontaler Transformation unterschieden wird. Die drei Formen können auch auf verschiedenste Weise kombiniert werden und sind eines der wichtigsten Arbeitsmittel vieler Komponisten.[56]

### *4.2.1.1 Die Translation (Wiederholung und Transposition)*

In der Musik wird hier nicht eine geometrische Figur, sondern eine Melodie verschoben. Bei einer horizontalen Translation werden die Noten nach rechts entlang der Notenlinie verschoben, was einer Wiederholung entspricht. Auch ein Kanon ist im Grunde genommen eine horizontale Translation. Eine vertikale Translation wird als Transposition bezeichnet. Dabei werden alle Noten nach demselben Intervall nach oben beziehungsweise nach unten verschoben.[57]

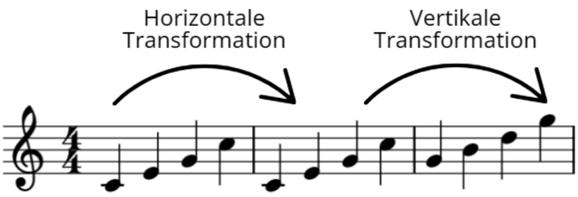


*Abbildung 18: Horizontale und vertikale Transformation*

### *4.2.1.2 Die Spiegelung (Krebs und Umkehrung)*

Bei der Spiegelung wird eine Melodie an einer horizontalen oder vertikalen Achse gespiegelt. Eine Spiegelung an der vertikalen Achse wird als Krebs bezeichnet, dabei wird eine Melodie rückwärts gespielt.[58]

---

[55] Vgl. McKinsey, Malcolm (12.01.2023): Transformations in Math. Definitions, Types and Examples. URL: Transformations in Math - Definition, Types & Examples (tutors.com) [Stand: 28.01.2024].
[56] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 71.
[57] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 166 f.
[58] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 76 f.


*Abbildung 19: Spiegelung an der vertikalen Achse*

Wird die Melodie horizontal gespiegelt, spricht man von einer Umkehrung. Geht eine Note in der Melodie um eine kleine Terz hinauf, so sinkt sie in der Umkehrung um eine kleine Terz. Da bei diesem Vorgang aber Töne entstehen können, die sich nicht in der richtigen Tonart befinden, entscheiden sich Komponisten oft für eine sogenannte „tonale Umkehrung“ anstelle einer „exakten Umkehrung“. Ein Meister der Spiegelungen war der berühmte Komponist Johann Sebastian Bach. Er bediente sich dieser Transformation vor allem in seinen vielen Fugen und Kanons.[59]

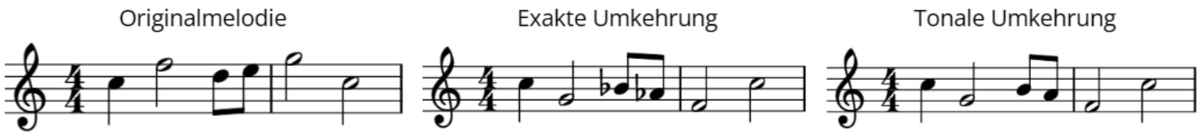


*Abbildung 20: Spiegelung an der horizontalen Achse*

#### *4.2.1.3 Die Drehung (Krebsumkehrung)*

Kombiniert man einen Krebs und eine Umkehrung, erhält man die sogenannte Krebsumkehrung. Dies wird in folgender Abbildung dargestellt:

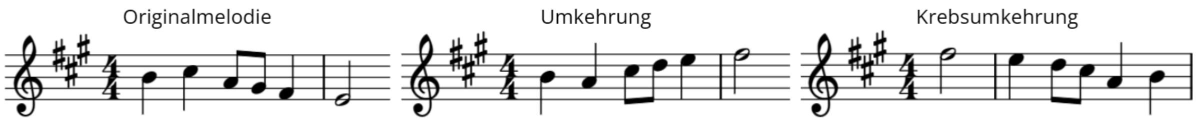


*Abbildung 21: Spiegelung an horizontaler und vertikaler Achse = Krebsumkehrung*

Ein gutes Beispiel für die Krebsumkehrung ist das Duett „Der Spiegel“ von Wolfgang Amadeus Mozart. Dabei handelt es sich um eine Komposition für zwei Geigen, die dieselbe Melodie, allerdings voneinander um 180 Grad gedreht, spielen. Die Umkehrung findet entlang der H-Linie statt, weshalb beide Geigenstimmen mit nur einer Notenlinie, an deren beiden Enden sich ein Violinschlüssel befindet, geschrieben werden können. Beide Geigenspieler lesen also dasselbe Notenblatt, aber in umgekehrte Richtung.[60]

---

[59] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 169 f.
[60] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 81 f.


*Abbildung 22: "Der Spiegel" Duett von Wolfgang Amadeus Mozart: Durch Drehung des Notenblattes um 180° erhält man die Stimme für die zweite Geige.[61]*

[61] W. A. Mozart: Der Spiegel (The Mirror) Duet. URL: IMSLP116722-WIMA.50a7-spiegel.pdf [Stand: 22.02.2024].

### 4.2.2 Skalare Transformationen

Bei der skalaren Transformation werden im Gegensatz zur isometrischen Transformation die Abstände zwischen den Elementen nicht mehr beibehalten. Man unterscheidet zwei Arten der skalaren Transformation, nämlich die horizontale und die vertikale Skalierung.[62]

#### 4.2.2.1 Horizontale Skalierung

Das Ziel einer horizontalen Skalierung ist es, die Geschwindigkeit zu ändern. Das kann erreicht werden, indem die Metronomkennzeichnung geändert wird oder indem beispielsweise Viertelnoten durch Achtelnoten, halbe Noten durch Viertelnoten und so weiter ersetzt werden.[63]

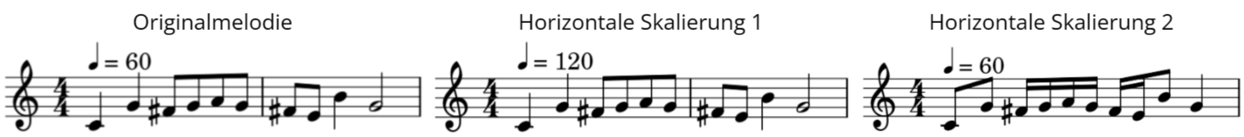


*Abbildung 23: Horizontale Skalierung*

#### 4.2.2.2 Vertikale Skalierung

Bei der vertikalen Skalierung werden Intervalle proportional verstärkt oder vermindert, indem beispielsweise Terzen durch Quinten ersetzt werden oder umgekehrt.[64]


*Abbildung 24: Vertikale Skalierung*

[62] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 88 f.
[63] Vgl. ebda, S. 89 f.
[64] Vgl. ebda, S. 91

## 4.3 Die Zwölftonmusik

### 4.3.1 Entstehung

Am Anfang des 20. Jahrhunderts geriet die tonale Musik in den Hintergrund. Das Verlangen nach Harmonie und einer gewissen Tonart, um die sich ein ganzes Stück dreht, ging verloren und so begannen die Komponisten sich in der atonalen Musik zu versuchen. Die atonale Musik hat nämlich im Gegensatz zur tonalen Musik keinen zentralen Ton und basiert auf der chromatischen Tonleiter. So erfand Arnold Schönberg in den 1920er-Jahren die sogenannte Zwölftontechnik, der sich später unter vielen anderen auch Alban Berg und Anton von Webern widmen werden.[65]

### 4.3.2 Die Zwölftontechnik

Die Zwölftontechnik ist eine von Grund auf mathematische Kompositionsmethode. Ihre wichtigste Eigenschaft ist, dass alle zwölf Töne der chromatischen Tonleiter gleichberechtigt sind und dementsprechend gleich oft vorkommen.

Der Grundbaustein einer Zwölftonkomposition ist eine bestimmte Tonreihe, in der jeder der zwölf Töne genau einmal vorkommt (davon gibt es $12! = 479001600$ Varianten). Diese sogenannte Grundreihe kann dann mit einer Umkehrung (U), einem Krebs (K) oder einer Krebsumkehrung (KU) transformiert werden. Sowohl die Originalreihe als auch ihre Umkehrung, ihr Krebs und ihre Krebsumkehrung können auf zwölf verschiedene Arten transponiert werden. Dies stellt dem Komponisten maximal $4 \cdot 12 = 48$ verschiedene Varianten der Grundreihe zur Verfügung, die er kreativ miteinander verknüpfen kann, um ein Musikstück zu kreieren.

Wichtig zu erwähnen bleibt noch, dass beispielsweise die Note c´ auch alle anderen c oder his in höheren und niedrigeren Oktaven vertritt. Der Komponist kann entscheiden, wo er die Note auf den Notenlinien platziert und somit auch, ob der Interpret ein c´ oder ein c´´ spielt, im Sinne der Zwölftonanalyse sind diese Töne jedoch dieselben.[66]

[65] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 121.
[66] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 229 ff.

### 4.3.3 Mathematik als Hilfsmittel – Die Matrixdarstellung

Um die Transformationen leichter durchführen zu können, hilft es die Tonreihen mit Zahlen darzustellen. Dafür wird dem ersten Ton der Originaltonreihe, unserem Referenzton, die Zahl 0 zugeordnet und einem Ton, der sich $n$ Halbtöne über dem Referenzton befindet, wird die Zahl $n$ zugeordnet. Dies wird hier am Beispiel von Schönbergs Suite für Klavier, Op. 25 veranschaulicht:

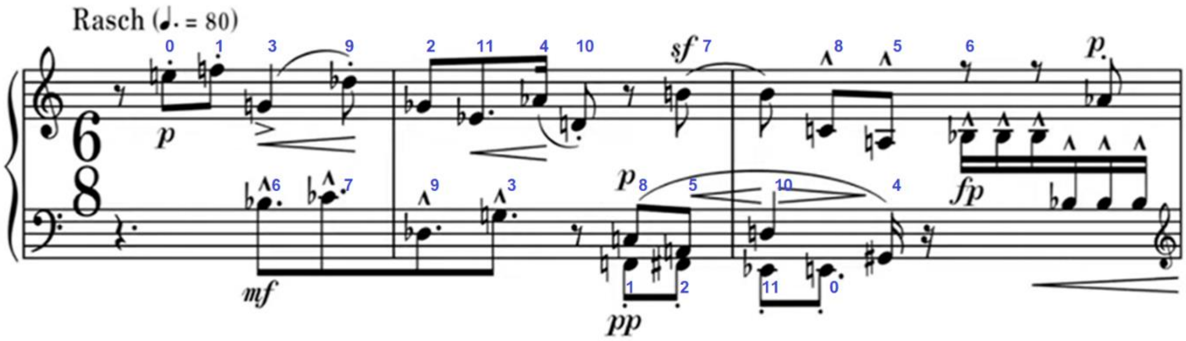


*Abbildung 25: Ersten drei Takte des Präludiums von Schönbergs Suite für Klavier, Op. 25*

Man kann die Originalreihe ($T_0$) also folgendermaßen anschreiben:

$$T_0(0{,}1{,}3{,}9{,}2{,}11{,}4{,}10{,}7{,}8{,}5{,}6)$$

Transponiert man diese Reihe um n Halbtonschritte, sieht die entstehende Reihe $T_n$ so aus:

$$T_n(0+n, 1+n, 3+n, 9+n, 2+n, 11+n, 4+n, 10+n, 7+n, 8+n, 5+n, 6+n)$$

Die linke Hand im oberen Notenbild entspricht beispielsweise der Reihe $T_6$.

Da wir hier mit einer beschränkten Zahlenmenge rechnen, müssen wir die sogenannte modulare Arithmetik anwenden. Das bedeutet, dass eine Transposition um 13 Halbtöne einer Transposition um einen Halbton entspricht, denn $13 \equiv 1(mod\ 12)$ oder eine Transposition um 15 Halbtöne einer um 3 Halbtöne entspricht ($15 \equiv 3(mod\ 12)$) und so weiter. Dies bedeutet auch, dass beispielsweise die Zahl 9 nach einer Transposition um 7 Halbtöne nicht durch die Zahl $9 + 7 = 16$, sondern durch die Zahl 4 ersetzt wird ($16 \equiv 4(mod\ 12)$).[67]

Um den Krebs $K_n$ der Reihe $T_n$ zu bilden, muss nur die Reihe von hinten nach vorne gelesen werden. Der Krebs der Originalreihe ist beispielsweise

[67] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 125 ff.

$$K_0(6,5,8,7,10,4,11,2,9,3,1,0).$$

Für die letzte Transformation, die Umkehrung, muss die Differenz zwischen 12 und den Zahlen der Reihe gebildet werden, wobei die Zahl 0 nicht durch eine 12 ersetzt wird, sondern 0 bleibt, weil $12 \equiv 0(mod\ 12)$. Die Umkehrung der Originalreihe wäre also

$$U_0(0,11,9,3,10,1,8,2,5,4,7,6).$$

Komponisten der Zwölftonmusik arbeiten oft mithilfe einer 12x12-Matrix, in der die 48 möglichen Varianten der Grundtonreihe in Zahlen oder Buchstaben eingetragen sind. Eine solche Matrix erleichtert Komponisten die Arbeit und sieht folgendermaßen aus:[68]

| | $U_0$ ↓ | $U_1$ ↓ | $U_3$ ↓ | $U_9$ ↓ | $U_2$ ↓ | $U_{11}$ ↓ | $U_4$ ↓ | $U_{10}$ ↓ | $U_7$ ↓ | $U_8$ ↓ | $U_5$ ↓ | $U_6$ ↓ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_0$ → | E | F | G | C# | F# | D# | G# | D | B | C | A | Bb | ← $K_0$ |
| $T_{11}$ → | D# | E | F# | C | F | D | G | C# | A# | B | G# | A | ← $K_{11}$ |
| $T_9$ → | C# | D | E | A# | D# | C | F | B | G# | A | F# | G | ← $K_9$ |
| $T_3$ → | G | G# | A# | E | A | F# | B | F | D | D# | C | C# | ← $K_3$ |
| $T_{10}$ → | D | D# | F | B | E | C# | F# | C | A | A# | G | G# | ← $K_{10}$ |
| $T_1$ → | F | F# | G# | D | G | E | A | D# | C | C# | A# | B | ← $K_1$ |
| $T_8$ → | C | C# | D# | A | D | B | E | A# | G | G# | F | F# | ← $K_8$ |
| $T_2$ → | F# | G | A | D# | G# | F | A# | E | C# | D | B | C | ← $K_2$ |
| $T_5$ → | A | A# | C | F# | B | G# | C# | G | E | F | D | D# | ← $K_5$ |
| $T_4$ → | G# | A | B | F | A# | G | C | F# | D# | E | C# | D | ← $K_4$ |
| $T_7$ → | B | C | D | G# | C# | A# | D# | A | F# | G | E | F | ← $K_7$ |
| $T_6$ → | A# | B | C# | G | C | A | D | G# | F | F# | D# | E | ← $K_6$ |
| | ↑ $KU_0$ | ↑ $KU_1$ | ↑ $KU_3$ | ↑ $KU_9$ | ↑ $KU_2$ | ↑ $KU_{11}$ | ↑ $KU_4$ | ↑ $KU_{10}$ | ↑ $KU_7$ | ↑ $KU_8$ | ↑ $KU_5$ | ↑ $KU_6$ | |

| | $U_0$ ↓ | $U_1$ ↓ | $U_3$ ↓ | $U_9$ ↓ | $U_2$ ↓ | $U_{11}$ ↓ | $U_4$ ↓ | $U_{10}$ ↓ | $U_7$ ↓ | $U_8$ ↓ | $U_5$ ↓ | $U_6$ ↓ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_0$ → | 0 | 1 | 3 | 9 | 2 | 11 | 4 | 10 | 7 | 8 | 5 | 6 | ← $K_0$ |
| $T_{11}$ → | 11 | 0 | 2 | 8 | 1 | 10 | 3 | 9 | 6 | 7 | 4 | 5 | ← $K_{11}$ |
| $T_9$ → | 9 | 10 | 0 | 6 | 11 | 8 | 1 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | ← $K_9$ |
| $T_3$ → | 3 | 4 | 6 | 0 | 5 | 2 | 7 | 1 | 10 | 11 | 8 | 9 | ← $K_3$ |
| $T_{10}$ → | 10 | 11 | 1 | 7 | 0 | 9 | 2 | 8 | 5 | 6 | 3 | 4 | ← $K_{10}$ |
| $T_1$ → | 1 | 2 | 4 | 10 | 3 | 0 | 5 | 11 | 8 | 9 | 6 | 7 | ← $K_1$ |
| $T_8$ → | 8 | 9 | 11 | 5 | 10 | 7 | 0 | 6 | 3 | 4 | 1 | 2 | ← $K_8$ |
| $T_2$ → | 2 | 3 | 5 | 11 | 4 | 1 | 6 | 0 | 9 | 10 | 7 | 8 | ← $K_2$ |
| $T_5$ → | 5 | 6 | 8 | 2 | 7 | 4 | 9 | 3 | 0 | 1 | 10 | 11 | ← $K_5$ |
| $T_4$ → | 4 | 5 | 7 | 1 | 6 | 3 | 8 | 2 | 11 | 0 | 9 | 10 | ← $K_4$ |
| $T_7$ → | 7 | 8 | 10 | 4 | 9 | 6 | 11 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | ← $K_7$ |
| $T_6$ → | 6 | 7 | 9 | 3 | 8 | 5 | 10 | 4 | 1 | 2 | 11 | 0 | ← $K_6$ |
| | ↑ $KU_0$ | ↑ $KU_1$ | ↑ $KU_3$ | ↑ $KU_9$ | ↑ $KU_2$ | ↑ $KU_{11}$ | ↑ $KU_4$ | ↑ $KU_{10}$ | ↑ $KU_7$ | ↑ $KU_8$ | ↑ $KU_5$ | ↑ $KU_6$ | |

*Abbildung 26: Matrix von Schönbergs Suite für Klavier, Op. 25*

Bezüglich der Suite für Klavier Op. 25 von Arnold Schönberg bleibt zu erwähnen, dass die gesamte Suite, die aus mehreren Teilen besteht und eine Aufführungsdauer von ca. 16 Minuten hat, sich nur der Reihen $T_0$, $T_6$, $U_0$, $U_6$, $K_6$ und $KU_6$ bedient. Außerdem ehrt Schönberg in seiner im Barockstil verfassten Komposition den Komponisten Johann Sebastian Bach. Die letzten vier Noten der Grundtonreihe $T_0$ sind nämlich C, H, A und B. Horizontal gespiegelt ergibt dies BACH.[69]

[68] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 125 ff.
[69] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 235 f.

## 4.4 Der goldene Schnitt

### 4.4.1 Grundlagen

Wenn das Verhältnis $a : b$ von zwei Größen $a$ und $b$ (wobei $a > b$) äquivalent zum Verhältnis $(a + b) : a$ ist, dann bezeichnet man dieses Verhältnis als goldenen Schnitt. Dabei gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398875 \ldots$$ [70]

Der goldene Schnitt wird auch als „göttliche Proportion" bezeichnet, da er seit vielen Jahrhunderten mit Schönheit und Ausgewogenheit assoziiert wird. Er ist einerseits in der Natur, beispielsweise in der Anordnung der Samen auf Sonnenblumen oder in den Spiralen von Schneckenhäusern, zu finden.[71]

Andererseits taucht er auch vielfach in der Kunst und Architektur wieder auf, da die meisten Menschen diese göttliche Proportion instinktiv als harmonisch empfinden. So ist sie in einigen der berühmtesten Gemälde und Bauten wiederzufinden, wobei aber in den meisten Fällen umstritten ist, ob sich die Künstler bewusst oder unbewusst des goldenen Schnittes bedienten.[72]

### 4.4.2 Anwendung in der Musik

In der Musik kann der goldene Schnitt auf zwei verschiedene Arten für die Komposition angewandt werden. Entweder kann das Frequenzverhältnis zweier Töne der göttlichen Proportion entsprechen oder die Längen einzelner Teile eines Musikstückes können im goldenen Schnitt zueinanderstehen.[73]

Ein Komponist wird immer erwähnt, wenn es um den goldenen Schnitt in der Musik geht, nämlich der ungarische Komponist Béla Bartók. Der Musikwissenschaftler Ernö Lendvai untersuchte viele seiner Werke und behauptete, dass der Einsatz des goldenen Schnittes in seinen Kompositionen eindeutig erkennbar sei. So besteht seine Sonate für zwei Klaviere und

---

[70] Vgl. Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. S. 184.
[71] Vgl. Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. S. 101.
[72] Vgl. Der Goldene Schnitt – Das mathematische Geheimnis der Schönheit (10.06.2022). URL: Der Goldene Schnitt – das mathematische Geheimnis der Schönheit | wissen.de [Stand: 03.01.2023].
[73] Vgl. Kah, Ronald: Goldener Schnitt in der Musik – einfach erklärt (4. Januar 2022). URL: Goldener Schnitt in der Musik - einfach erklärt (ronaldkah.de) [Stand: 23.02.2024].

Schlagzeug aus 6432 Achtelnoten, wobei der zweite Satz genau nach 3975 Achtelnoten beginnt. Das Verhältnis dieser beiden Längen entspricht auf drei Kommastellen gerundet genau der Zahl $\phi = 1{,}618\ldots$ und auch im ersten Satz verhalten sich Hauptteil und Durchführung zur Reprise im goldenen Schnitt. Ähnliches ist an vielen anderen Werken Béla Bartóks erkennbar, jedoch bleibt umstritten, ob es sich um ein bewusst eingesetztes Gestaltungsmittel handelt oder nicht.

Auch in Mozarts Klaviersonate KV 333 lässt sich auf ähnliche Art und Weise der goldene Schnitt nachweisen, doch trotz seiner Vorliebe für Zahlen gehen Musikwissenschaftler bei ihm eher von einem intuitiven Gefühl aus.[74]

[74] Vgl. Schaurhofer, Agathe: Musik und ihre mathematische Saite. Universität Wien, Diplomarbeit 2009, S. 57 f.

# 5. Schluss

Im Verlauf dieser Arbeit wurden die Zusammenhänge zwischen der Mathematik und der Musik gesucht und ich glaube behaupten zu können, dass diese vielfältiger sind, als man auf den ersten Blick denken mag. Aber ist die Mathematik nun essenziell für die Musik?

Eine Sache ist klar: ohne Mathematik wäre es nicht möglich gewesen, Schallwellen zu analysieren oder überhaupt Tonsysteme zu entwickeln und Komponisten hätten dadurch überhaupt kein Schema, dem sie bei ihrer Arbeit folgen könnten. Die Mathematik hat den Musikern viele Türen geöffnet und ihnen die Arbeit sehr erleichtert. Also ja, die Mathematik ist nicht nur hilfreich, sondern auch wirklich notwendig für die Musik, so wie wir sie heute kennen.

Dennoch ist Musik bei weitem mehr als reine Mathematik. Das zeigt allein schon der Fakt, dass keines der Versuche, die Musik mathematisch zu begründen, vollständig funktioniert hat. Ein gutes Beispiel hierfür ist das Kapitel „Stimmungen und Temperierung“. Mathematiker haben jahrhundertelang versucht ein Tonsystem zu schaffen, das sowohl alle Intervalle in ihrer reinsten Form respektiert als auch so viel musikalische Freiheit (beispielsweise in Bezug auf Transposition) wie möglich gewährt, um schließlich zum Schluss zu kommen, dass beide Bedingungen niemals vollständig erfüllt werden können. Ebenso gibt es keine vollständig mathematisch begründete Formel, die uns erklären kann, warum wir manche Klänge als angenehm empfinden, während wir andere kaum aushalten können. Die Mathematik hilft uns die Musik besser zu verstehen, aber vollständig erklären kann sie sie schlussendlich nicht.

Ich möchte meine Arbeit dementsprechend mit folgender Erkenntnis abschließen: Mathematik versteckt sich in vielen verschiedenen Formen hinter der Musik, aber Musik ist nicht nur Mathematik, was im Endeffekt vielleicht auch gut ist, denn das eigentlich Wichtige in der Musik sind ja die Emotionen, die sie uns vermittelt.

# Literaturverzeichnis

## Einzelwerke von Autoren


Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. Exploring the Connections. 1. Auflage. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press 2016.

Arbonés, Javier/ Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. Rhythmus, Resonanz und Harmonie. deutschsprachige Auflage. Kerkedriel, Niederlande: Librero 2017.

Fauvel, John/ Flood, Raymond/ Wilson, Robin: Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals. 1. Auflage. New York, United States: Oxford University Press 2003.

Maor, Eli: Music by the Numbers. From Pythagoras to Schoenberg. 1. Auflage. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 2018.

Benson, David J.: Music. A Mathematical Offering. 6. Auflage2013. Cambridge, Vereinigtes Königreich: Cambridge University Press 2007.

Schüffler, Karlheinz: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma. Mathematische Temperierungstheorie in der Musik. 2. Auflage. Wiesbaden, Deutschland: Springer Spektrum 2017

Schüffler, Karlheinz: Die Tonleiter und ihre Mathematik. Mathematische Theorie musikalischer Intervalle und historischer Skalen. 3. Auflage. Willich, Nordrhein-Westfalen, Deutschland: Springer Spektrum 2022.

Reichle, Maria: Mathe macht Musik!. Fächerverbindender Unterricht in Mathematik und Musik in der Grundschule. Universität Augsburg. Zulassungsarbeit gem. § 30 LPO I für das Lehramt an Grundschulen 2010, S. 6-13.

Schaurhofer, Agathe: Musik und ihre mathematische Saite. Universität Wien, Diplomarbeit 2009, S. 57f.


## Zeitungen und Zeitschriften


Houlou-Garcia, Antoine: La musique des nombres. In: Cosinus. N°205 Juni 2018, S. 34-39


## Internet


Saus, Wolfgang: Die Obertonreihe: URL: Die Obertonreihe - Aufbau, Anwendung und Hintergründe [Stand: 15.10.2023].

Gorski, Markus: Die Obertonreihe. URL: Die Obertonreihe (lehrklaenge.de) [Stand: 01.10.2023].

Jouannic, Thibault: Comment fonctionne le son?. Consonance, dissonance…pourqoui les sons se marient ou pas?.URL:www.mamie-note.fr [Stand: 26.12.2023].

Jedrzejewski, Franck (2009): Euler et les réseaux harmoniques. URL: https://doi.org/10.7202/1000040ar [Stand: 21.02.2024].

Akustische Wellen. Schwebung. URL: Schwebung | LEIFIphysik [Stand: 5.11.2023].

Vereinigung der Orgelsachverständigen Deutschlands. Temperierung und Stimmung. URL: Temperierung und Stimmung (orgelexperte.de) [Stand: 28.01.2024].

La fabuleuse histoire des notes de musique. La gamme de Pythagore. URL: La gamme de Pythagore - La fabuleuse histoire des notes de musique - EasyZic [Stand: 12.08.2023].

Brunotts, Kate (20.04.2023): Musik Transposition. Der ultimative Leitfaden. URL: Musik Transposition: Der ultimative Leitfaden (emastered.com) [Stand: 18.08.2023].

McKinsey, Malcolm (12.01.2023): Transformations in Math. Definitions, Types and Examples. URL: Transformations in Math - Definition, Types & Examples (tutors.com) [Stand: 28.01.2024].

Der Goldene Schnitt – Das mathematische Geheimnis der Schönheit (10.06.2022). URL: Der Goldene Schnitt – das mathematische Geheimnis der Schönheit | wissen.de [Stand: 03.01.2023].

Kah, Ronald: Goldener Schnitt in der Musik – einfach erklärt (4. Januar 2022). URL: Goldener Schnitt in der Musik - einfach erklärt (ronaldkah.de) [Stand: 23.02.2024].

## Abbildungsverzeichnis

## Selbstständigkeitserklärung

Name:

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich diese vorwissenschaftliche Arbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

___________________ ____________________

Ort, Datum Unterschrift

Zustimmung zur Aufstellung in der Schulbibliothek

Ich gebe mein Einverständnis, dass ein Exemplar meiner vorwissenschaftlichen Arbeit in der Schulbibliothek meiner Schule aufgestellt wird.

___________________ ____________________

Ort, Datum Unterschrift

## Haftungsausschluss

Das BG/BRG Carneri und die Betreuerin/der Betreuer der Arbeit übernehmen keinerlei Haftung für etwaige Urheberrechtsverletzungen, die sich aus einer Veröffentlichung der VWA ergeben könnten.